

BSPE 00270-428-2

吹送流 再現을 위한 等水深 3次元  
數値모델 樹立 研究

A Study on Depth Variation of Wind-induced Flows  
in an Idealized Basin of Constant Depth

1992. 3.

韓國海洋研究所



## 提 出 文

韓國海洋研究所長 貴下

本 報告書를 " 吹送流 再現을 위한 等水深 3次元 數值모델 樹立 研究"의 最終報告書로  
提出합니다.

1992年 3月

韓國海洋研究所 海洋工學部

研究責任者：鄭景太

研 究 員：李光守

蘇在貴

陳載律



# 要約文

## I. 題目

吹送流 再現을 위한 等水深 3次元 數値모델 樹立 研究

## II. 研究開發의 目的 및 重要性

원유유출에 의한 해양오염문제, 연안역 폐열확산, 그리고 퇴적물 이동에 관한 관심이 고조되면서 표층 및 해저면 경계층내 풍성류 형성을 효과적으로 재현할 수 있는 3차원모델 개발의 필요성이 대두되고 있다.

본 보고서에서는 연직방향 유속변화 처리에 있어 대별되는 두 모델 즉, 함수전개모델(Galerkin-function model)과 Grid box 모델 개발의 1차년도 결과를 기술한다. 첫번째 모델의 경우 연직방향 유속 결정에 Eigenfunction 전개, 그리고 시간과 수평방향 적분에는 유한차분법이 사용된다. 두번째 모델은 수평방향은 물론 수직방향으로도 유한차분법이 이용된다.

## III. 研究開發의 內用 및 結果

본 보고서의 전반부에는 연직혼합이 충분히 일어나는 천해역에서의 취송류 재현을 위한 Galerkin-유한차분 혼합기법에 대해 기술한다. 기본방정식은 Galerkin기법 적용전에 External mode식과 Internal modes식으로 분리 표현된다. External mode식은 해수표면 변위를 결정해주는 지배방정식으로 수심평균 유속을 수반한다. 반면 Internal modes식은 연직방향의 수평유속 변화를 나타내며 해수면 경사와는 무관하다. 이 모우드 분리 개념의 도입으로 External mode와 Internal modes의 계산시간 간격을 달리할 수 있으므로(즉, Time splitting method의

채택이 가능) 계산시간을 상당량 절약할 수 있다. 모든 계산에서 난류 확산계수의 연직방향 변화는 없는 것으로 가정하며 전개함수로는 난류계수항으로부터 구성되는 Sturm-Liouville 시스템의 해(Eigenfunction)가 사용된다. Eigenfunction 결정시의 경계조건은 Sheared boundary condition이 사용된다. 일차 결과로 장방형 Basin내 취송류 형성 문제를 검토하였다.

보고서 후반부에서는 연직방향으로 Log 변환된 좌표계를 이용하는 Grid box 모델이 기술되었다. 이 Grid box 모델은 파랑류 형성에의 적용을 염두에 두고 개발중이며 일차적으로 Point model로서 개발되었다

# SUMMARY

## I . Title

A Study on Depth Variation of Wind-induced Flows in an Idealized Basin of Constant Depth.

## II . Objective and Significance of the Study

With increased interest in problems involving the spread and dispersion of oil spills and heated discharges, and in the transport of sediments, there is an increasing demand to develop three-dimensional hydrodynamic models that can effectively reproduce the near-surface and near-bottom wind and wave induced flows.

In this report we are concerned with mathematical development of two three-dimensional models which differ each other for integrating the governing equations over the vertical space domain. The first model considered is a mixed model in which the vertical dependence of horizontal currents is determined using the Galerkin method, whereas a finite difference method is used for the integration in time and the horizontal spatial coordinates. The second model is a finite difference model which uses grid boxes to approximate the currents in three dimensions.

## III . Contents and Results of the Study

In the first part of the report a Galerkin-finite difference method is developed for the solution of linear three-dimensional equations which describes wind induced flow in a homogeneous sea. The basic equations are separated into two systems at the outset. Namely, an equation containing the gradient of sea surface elevation and the mean flow(external mode) and an equation describing the deviation from the mean flow(internal modes). With this separation equations can be economically integrated using a time splitting method. The eddy viscosity is assumed to be constant throughout the depth. The basis functions are determined analytically from an eigenvalue problem involving the vertical eddy viscosity using a homogeneous boundary condition at the sea surface and a sheared boundary condition at the sea bed. The problem of wind induced flow in a rectangular basin is examined in detail.

The second part comprises a brief presentation of a point model using grid boxes in the vertical. To resolve the high-shear near-surface layer the equations are transformed onto a logarithmic coordinate scale in the vertical.





제 I 편  
( Part I )



# 모우드 분리기법을 이용한 3차원 스펙트랄 모델 개발 연구

## A Study on a 3-D Spectral Model using Mode Splitting Technique for the Computation of Wind-induced flows in an Idealized Basin of Constant Depth

정 경태, 소 재귀, 이 광수, 진 재을

한국해양연구소 연안공학연구실

Kyung-Tae Jung, Jae-Kwi So, Kwang-Soo Lee, Jae-Youlle Jin

Coastal Engineering Laboratory, KORDI

### 要 約

취송류 순환을 재현키 위한 3차원 해수유동 모델을 개발하였다. 기본방정식을 External mode와 Internal modes로 분리시킨 다음 Internal modes식에 Galerkin method를 적용하였다. 수직 와점성계수는 수평, 수직방향으로 동일하게 주고 Eigenfunction은 해수면에 Homogeneous boundary condition과 해저면에 Sheared boundary condition이 가해지는 Eigenvalue 문제로부터 구한다. 수립된 모델을 정상상태의 균일한 바람응력이 가해지는 장방형 Basin에 적용하여 모델의 성능을 검토하였다.

### Abstract

The mathematical development of a three-dimensional hydrodynamic model for the wind induced flows is described. The hydrodynamic equations are separated into two

systems(external mode and internal modes) before applying Galerkin method. The eddy viscosity is assumed to be constant throughout the depth and in the horizontal direction. The eigenvalues are determined from the eigenvalue problem involving the vertical eddy viscosity subject to a homogeneous boundary condition at the sea surface and a sheared boundary condition at the sea bed. The model is applied to a homogeneous, rectangular basin of constant depth and steady, uniform wind field to examine model performance.

## 1. 서 론

최근 해양 및 연안의 해류순환을 연구하는 데 있어서 수치모델링 기법의 활용이 증대되고 있다. 이 중에서 현재 가장 많이 사용되고 있는 수심 적분 2차원 수치모델을 적용하는 경우 해저마찰을 계산하는 데 있어 해저면 유속 대신 수심평균 유속을 사용하기 때문에 해수면을 정확히 재현하기 어려울 뿐만 아니라, 해류의 수직구조를 계산할 수 없는 단점이 있다. 최근에는 장애가 되었던 컴퓨터의 용량 및 계산속도가 날로 증대됨에 따라 3차원 수치모델을 적용하는 경우가 늘어가고 있다.

3차원 수치모형을 연직방향 처리에 따라 크게 Ekman해 이용모델, 다층튜브 모델(Multi-layered model), 다층격자 모델(Multi-level grid box model), Galerkin 함수 이용 모델(Galerkin function model)로 나눌 수 있다. Ekman해 이용모델은 Ekman(1905)의 방법을 사용하여 해류단면을 구하는 준 2차원 수치모델로서 2차원 모델을 이용, 수심평균 유속과 해수위를 구한다. 다층튜브 모델은 수직단면을 불투수층들의 중첩으로 구성하며 각층의 해수밀도는 일정하다고 가정한다. 다층격자 모델은 수직단면을 일정수의 격자로 표현하며, 고정격자 모델과 좌표변환(예로  $\sigma$ -transformed) 모델로 구분할 수 있다.

본 연구에서 사용한 Galerkin 함수 이용 모델은 수직좌표상의 수평유속성분을 수평좌표, 시간에 따라 변하는 계수와 수심에 따라 변하는 함수군의 곱의 형태로 선형전개하며, 계수의 값은 Galerkin method를 써서 구한다. 이 방법은 이론전개가 해양물리적 현상에 잘 부합될 뿐만 아니라 계산이 단순하여 경제성이 높기 때문에 다른 3차원 모델에 비해 적용성이 매우 뛰어나다고 할 수

있다. Heaps(1972)는 최초로 수평좌표계에서 유한차분기법(Finite difference method)을, 수직좌표계에서 함수 전개 기법을 결합시킨 3차원 수치모델을 개발하였다. Basis function으로는 수직 와점성계수를 포함하는 2차미분항의 Eigenfunction을 택하였으며, 수직 와점성계수는 일정한 값을 취하였다. 해저면에서는 Stress boundary condition을 사용하였으며, Linear friction law를 사용하여 계산을 간략화하였다.

본 연구는 Heaps(1972)가 사용한 수치모델 기법에 External mode와 Internal modes를 구분하는 모우드 분리기법을 추가하였다. Gordon(1982)은 해저면 활동조건(Bottom Slip condition)에 Legendre function을 Basis function으로 사용할 경우 자연스럽게 모우드 분리가 이루어짐을 보인 바 있으며, Davies(1982, 1985)는 임의의 Basis function에도 모우드 분리 기법의 도입이 가능함을 보였다. 수면변이와 수심평균유속을 계산하는 External mode와 유속의 수직구조만을 계산하는 Internal modes를 분리하여 계산하는 경우, Internal modes는 CFL 조건에 따른 계산시간의 제한을 받지 않기 때문에 계산시간 간격을 크게 잡을 수 있어(즉, Time splitting method의 채택이 가능하여) 경제적인 면에서 크게 유리할 뿐만 아니라 Internal modes에서는 수면변이에 관계없이 유속의 수직단면만을 별도로 고찰할 수 있는 잇점이 있다. 또한, Heaps(1972)는 계산을 단순화하기 위해 해저면 마찰응력 계산시에 Linear friction law를 적용하였으나 본 모델의 경우는 이러한 제한을 받지 않고 계산시간을 줄일 수 있다. 본 연구는 계산결과를 Heaps(1972)과 비교하기 위하여 이와 동일한 조건(Heaps' Basin)에 대해 모델 시험을 실시하였다.

## 2. 기본방정식 및 계산식

### 2.1 기본방정식

수직방향 가속항, 비선형 이류항을 무시하고 해수밀도가 균일하다고 가정한(Homogeneous condition) 3차원 연속방정식과 운동방정식은 아래와 같이 표현된다(Heaps, 1972).

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h v \, dz = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \gamma v = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial z}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \gamma u = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial G}{\partial z}. \quad (2.3)$$

여기서,  $x, y$  : 평면상의 동향, 북향 직교좌표계,

$z$  : 평균해면하의 수직좌표,

$t$  : 시간,

$\zeta$  : 평균해면상의 해수위,

$u, v$  : 수심  $z$ 에서의  $x, y$  방향 유속 성분,

$\rho$  : 해수밀도,

$\gamma$  : Coriolis 계수,

$g$  : 중력가속도

이며,  $F, G$ 는  $x, y$ 방향 내부 마찰 응력으로서 아래와 같이 표현된다.

$$F = -\rho N \frac{\partial u}{\partial z}, \quad G = -\rho N \frac{\partial v}{\partial z}. \quad (2.4)$$

윗 식에서  $N$ 은 수직 와점성계수(Coefficient of vertical eddy viscosity)이다. 식 (2.4)를 사용하면 식 (2.2), (2.3)은

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \gamma v = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left( N \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \gamma u = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left( N \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (2.6)$$

으로 표현된다. 식 (2.1), (2.5), (2.6)을 풀기 위해서는 해수면과 해저면에서 경계조건이 부과되어야 한다. 해수면 경계조건은

$$F = F_s, \quad G = G_s \quad \text{at } z = 0 \quad (2.7)$$

로 주어지며, 여기서,  $F_s, G_s$ 는 해수면상 바람응력의  $x, y$  방향 성분을 나타낸다. 식 (2.4)에 의하면 식 (2.7)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$F_s = -\rho \left( N \frac{\partial u}{\partial z} \right)_0, \quad G_s = -\rho \left( N \frac{\partial v}{\partial z} \right)_0 \quad (2.8)$$

위에서 첨자 0은  $z = 0$ (해수면)에서의 값을 의미한다. 마찬가지로 해저면 경계조건은

$$F = F_b, \quad G = G_b \quad \text{at } z = h \quad (2.9)$$

로 주어지며,  $F_b, G_b$ 는 해저면에서의 마찰응력의  $x, y$ 방향 성분을 나타낸다. 식 (2.4)에 의해 다시 쓰면,

$$F_b = -\rho \left( N \frac{\partial u}{\partial z} \right)_h, \quad G_b = -\rho \left( N \frac{\partial v}{\partial z} \right)_h \quad (2.10)$$

가 된다. 위에서 첨자  $h$ 는  $z = h$ (해저면)에서의 값을 의미한다.

해저면 마찰응력이 해저면 유속에 선형적으로 비례한다고 가정하는 경우

$$F_b = k\rho u_h, \quad G_b = k\rho v_h \quad (2.11)$$

로 표현할 수 있으며, 위에서  $k$ 는 상수 또는  $x, y$ 의 함수인 해저면 마찰계수이고,  $u_h, v_h$ 는  $x, y$ 방향 성분의 해저면 유속이다. 해저면 마찰응력이 해저면 유속과 비선형 관계를 가지는 경우는 아래와 같이 표현될 수 있다.

$$F_b = K\rho u_h (u_h^2 + v_h^2)^{0.5}, \quad G_b = K\rho v_h (u_h^2 + v_h^2)^{0.5} \quad (2.12)$$

위에서  $K$ 는 마찬가지로 해저면 마찰계수를 나타낸다. 또한, 경우에 따라서는 아래와 같은 비활동 조건(No slip condition)이 사용되기도 한다.

$$u_h = v_h = 0 \quad (2.13)$$

## 2.2 모우드 분리 기법

공간 및 시간 좌표계상의 유속  $u(x, y, z, t)$  및  $v(x, y, z, t)$ 는 해수면 변이에 영향을 미치는 수심평균 유속  $\bar{u}(x, y, t)$ ,  $\bar{v}(x, y, t)$ 와 흐름의 수직변이만을 표현하는 유속성분  $u'(x, y, z, t)$ ,  $v'(x, y, z, t)$ 로 나눌 수 있으며, 이를 각각 External mode, Internal modes라고 부른다. 즉,

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad (2.14)$$

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_0^h u dz, \quad \bar{v} = \frac{1}{h} \int_0^h v dz \quad (2.15)$$

이다. 이상과 같이 External mode와 Internal modes를 분리하여 계산을 수행하는 경우 External mode는 CFL 안정성 조건에 의해 계산시간 간격상 제한이 따르는 데 비해 Internal modes는 이러한 제한이 없기 때문에 계산시간 간격을 훨씬 크게 택할 수 있으며, 이는 경제성이 중요시되는 3차원 모델에서 큰 장점이라고 할 수 있다. 또한, Internal modes를 별도로 계산하기 때문에 수심평균된 유속을 제외한 유속의 수직구조만을 별도로 고찰할 수 있다. Heaps(1972)가 사용한 수치계산식에서는 해저마찰응력을 선형 관계식으로 제한하여 계산식의 단순화와 수치모델의 경제성 제고를 도모한 데 비하여 모우드 분리 기법을 사용하는 경우에는 이러한 제한이 없어도 경제성이 보장되는 잇점이 있다.

연속방정식 (2.1)에 식 (2.14)를 대입하면 다음과 같이 수심평균 연속방정식이 된다.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(h\bar{v}) = 0. \quad (2.16)$$

식 (2.2), (2.3)을 수심에 대해 적분하고  $h$ 로 나누면 아래와 같은 식이 된다.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \gamma \bar{v} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{F_b}{\rho h} + \frac{F_s}{\rho h}, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \gamma \bar{u} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{G_b}{\rho h} + \frac{G_s}{\rho h}. \quad (2.18)$$

식 (2.5)에서 식 (2.17)을, 식 (2.6)에서 식 (2.18)을 각각 제하면,



$$\frac{\partial u'}{\partial t} - \gamma v' = \frac{\partial}{\partial z} \left( N \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{F_b}{\rho h} - \frac{F_s}{\rho h}, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + \gamma u' = \frac{\partial}{\partial z} \left( N \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{G_b}{\rho h} - \frac{G_s}{\rho h}. \quad (2.20)$$

와 같이 된다. 이상과 같이 기본방정식 식 (2.1), (2.5), (2.6)은 External mode인 식 (2.16)~(2.18)과 Internal modes인 식 (2.19), (2.20)으로 나누어진다.

### 2.3 Internal modes의 계산

Internal modes 식 (2.19), (2.20)을 풀기 위해서 두 식에  $0 \leq z \leq h$ 에서 2차 미분가능한 함수  $f(z)$ 를 곱한 다음 수식에 대해 적분한다. 먼저, 식 (2.19)에 대해 적용해 보면,

$$\int_0^h \frac{\partial u'}{\partial t} f_k dz - \int_0^h \gamma v' f_k dz = \int_0^h \frac{\partial}{\partial z} \left( N \frac{\partial u}{\partial z} \right) f_k dz + \int_0^h \frac{F_b - F_s}{\rho h} f_k dz$$

과 같다. 2차 미분이 포함된 항에서 부분적분을 취하고 정리하면 아래와 같은 식이 된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h u' f_k dz - \gamma \int_0^h v' f_k dz &= f_k(h) \left( N \frac{\partial u}{\partial z} \right)_h - f_k(0) \left( N \frac{\partial u}{\partial z} \right)_0 \\ &- u_h \left( N \frac{\partial f_k}{\partial z} \right)_h + u_0 \left( N \frac{\partial f_k}{\partial z} \right)_0 + \int_0^h u \frac{\partial}{\partial z} \left( N \frac{\partial f_k}{\partial z} \right) dz + \frac{F_b - F_s}{\rho h} \int_0^h f_k dz. \end{aligned} \quad (2.21)$$

위에서 Weight function으로 사용한 함수  $f_k$ 는 Eigenfunction으로서 다음과 같은 Sturm-Liouville system을 만족시킨다고 가정한다.

$$\frac{d}{dz} \left( N \frac{df_k}{dz} \right) = -\lambda_k f_k, \quad (2.22)$$

$$f(0) = 1, \quad (2.23)$$

$$Nf'(0) + \beta_1 f(0) = 0, \quad (2.24)$$

$$Nf'(h) + \beta_2 f(h) = 0. \quad (2.25)$$

여기서,  $\lambda_k$ 는  $k$ 번째 Eigenvalue,  $\beta_1, \beta_2$ 는 특정 계수들이다.

식 (2.21)에 식 (2.8), (2.10), (2.22), (2.23), (2.24), (2.25) 등을 대입하면 다음과 같은 식이 된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h u' f_k dz - \gamma \int_0^h v' f_k dz = & - \frac{F_b}{\rho} f_k(h) + \frac{F_s}{\rho} + \beta_2 u_h f_k(h) - \beta_1 u_o \\ & - \lambda_k \bar{u} \int_0^h f_k dz + \frac{F_b - F_s}{\rho h} \int_0^h f_k dz - \lambda_k \int_0^h u' f_k dz . \end{aligned} \quad (2.26)$$

Internal modes 유속  $u', v'$ 는 다음과 같이 수직좌표  $z$ 의 함수인 Basis function  $f_r(z)$ 와 수평좌표 및 시간의 함수인 계수  $A_r(x, y, t), B_r(x, y, t)$ 를 사용하여 Linear combination으로 표현할 수 있다.

$$u'(x, y, z, t) = \sum_{r=1}^M A_r(x, y, t) \cdot f_r(z) , \quad (2.27)$$

$$v'(x, y, z, t) = \sum_{r=1}^M B_r(x, y, t) \cdot f_r(z) . \quad (2.28)$$

여기서,  $M$ 은 모우드 수이다. 식 (2.26)에 식 (2.27)을 대입하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{r=1}^M A_r \int_0^h f_r f_k dz - \gamma \sum_{r=1}^M B_r \int_0^h f_r f_k dz = & - \frac{F_b}{\rho} f_k(h) + \frac{F_s}{\rho} \\ & + \beta_2 u_h \cdot f_k(h) - \beta_1 u_o - \lambda_k \bar{u} \int_0^h f_k dz + \frac{F_b - F_s}{\rho h} \int_0^h f_k dz \\ & - \lambda_k \sum_{r=1}^M A_r \int_0^h f_r f_k dz . \end{aligned} \quad (2.29)$$

Basis function  $f_r$ 는 식 (2.22)~(2.25)의 Sturm-Liouville system을 만족하는 Eigenfunction이기 때문에 다음과 같은 Orthogonality 특성을 갖는다.

$$\int_0^h f_r f_k dz = 0 , \quad \text{if } r \neq k . \quad (2.30)$$

식 (2.30)을 식 (2.29)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_k}{\partial t} \int_0^h f_k^2 dz - \gamma B_k \int_0^h f_k^2 dz = & -\frac{F_b}{\rho} f_k(h) + \frac{F_s}{\rho} + \beta_2 u_h f_k(h) - \beta_1 u_o \\ & - \lambda_k \bar{u} \int_0^h f_k dz + \frac{F_b - F_s}{\rho h} \int_0^h f_k dz - \lambda_k A_k \int_0^h f_k^2 dz . \end{aligned} \quad (2.31)$$

계산의 편의를 위하여

$$\frac{1}{h} \int_0^h f_k dz = a_k , \quad (2.32)$$

$$\int_0^h f_k^2 dz = 1 / \phi_k \quad (2.33)$$

라고 하면, 식 (2.31)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_k}{\partial t} - \gamma B_k + \lambda_k A_k = & \left[ \left\{ a_k - f_k(h) \right\} \frac{F_b}{\rho} + \left\{ 1.0 - a_k \right\} \frac{F_s}{\rho} \right. \\ & \left. + \beta_2 u_h f_k(h) - \beta_1 u_o - \lambda_k a_k \bar{u} h \right] \phi_k . \end{aligned} \quad (2.34)$$

마찬가지의 과정을 거쳐 y방향에 대한 식을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_k}{\partial t} + \gamma A_k + \lambda_k B_k = & \left[ \left\{ a_k - f_k(h) \right\} \frac{G_b}{\rho} + \left\{ 1.0 - a_k \right\} \frac{G_s}{\rho} \right. \\ & \left. + \beta_2 v_h f_k(h) - \beta_1 v_o - \lambda_k a_k \bar{v} h \right] \phi_k . \end{aligned} \quad (2.35)$$

## 2.4 Eigenfunction 유도

수직 와점성계수  $N$ 이 수심을 통해 일정하다고 가정하고 기본식 (2.22)와 경계조건 (2.23)~(2.24)를 풀어 Sturm-Liouville system의 해를 구하면

$$f_k(z) = \cos p_k z - \frac{\beta_1}{N p_k} \sin p_k z \quad (2.36)$$

가 된다. 여기서,  $p_k = \sqrt{\lambda_k / N}$ 이다. 식 (2.36)을 식 (2.25)에 대입하여 정리하고  $p_k h = \alpha_k$ 라고 하면,

$$\tan \alpha_k = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\frac{N \alpha_k}{h} + \beta_1 \beta_2 \left( \frac{N \alpha_k}{h} \right)} \quad (2.37)$$

가 된다. 일반적으로  $\beta_2 > \beta_1$ 라고 할 수 있고 이 경우 식 (2.37)은 Fig. 2.1과 같은 해를 가지며, 이 해는 Iteration method에 의해 쉽게 구할 수 있다. 식 (2.37)에서  $N$ 은  $0.065 \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $h = 65.0 \text{ m}$ ,  $\beta_1 = 0.0$ ,  $\beta_2 = 0.002$ 로 두고 구한 Eigenfunction의 형태는 Fig. 2.2와 같다. 위에서 구한 해를 이용하면  $a_k$ ,  $\phi_k$ 를 다음 식으로 계산할 수 있다.

$$a_k = \frac{\sin \alpha_k}{\alpha_k} + \frac{h \beta_1}{N \alpha_k^2} \cos \alpha_k - \frac{h \beta_1}{N \alpha_k^2}, \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\phi_k} &= \frac{h}{2} \left[ 1 + \frac{\sin \alpha_k}{\alpha_k} \cos \alpha_k \right] + \frac{h^3 \beta_1^2}{2N^2 \alpha_k^2} \left[ 1 - \frac{\sin \alpha_k}{\alpha_k} \cos \alpha_k \right] \\ &+ \frac{h^2 \beta_1}{2N \alpha_k^2} (2\cos^2 \alpha_k - 1) - \frac{h^2 \beta_1}{2N \alpha_k}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

$\alpha_k$ 의 값은 Fig. 2.1에서 보는 바와 같이 활동조건(Slip condition)일 경우

$$(k-1)\pi < \alpha_k < \left(k - \frac{1}{2}\right)\pi \quad (2.40)$$

에 존재한다.  $\alpha_k$ 의 값은 해수면 바람응력계수 및 해저면 마찰응력계수에 따라 그 값이 변한다.  $\beta_2, \beta_1 \rightarrow 0$ 인 경우, 즉 해저면에서 완전활동 조건(Free slip condition)이 주어지는 경우  $\tan \alpha_k \rightarrow 0$ 이므로

$$\alpha_k \rightarrow (k-1)\pi \quad \text{as } \beta_2 \rightarrow 0 \quad (2.41)$$

가 된다. 또한,  $\beta_2 \rightarrow \infty$ 인 경우, 즉 해저면에서 비활동 조건(No slip condition)이 주어지는 경우는  $\tan \alpha_k \rightarrow \infty$ 이므로

$$\alpha_k \rightarrow \left(k - \frac{1}{2}\right)\pi \quad \text{as } \beta_2 \rightarrow \infty \quad (4.42)$$

가 된다.  $\alpha_k$ 의 값은 수직 와점성계수(Coefficient of vertical eddy viscosity)  $N$ 에 따라서도 변하는데  $N \rightarrow \infty$ 일 경우  $p_k \rightarrow 0$ 이 되므로 식 (2.36)에서  $f_k(z) \rightarrow 1.0$ 이 된다. 따라서, 모든 모드에 대한 식이 수심평균식으로 환원된다.

## 2.5 수직유속성분

연속방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.43)$$

여기서, 수직유속성분( $w$ )의 각 항에 수심  $z$ 로부터 해저면까지의 적분을 취한 다음, 해저면 경계조건을 부과하여 풀면

$$w = \frac{\partial}{\partial x} \int_z^h u \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_z^h v \, dz \quad (2.44)$$

가 되고, 여기서 식 (2.14)에 따라 수심평균유속과 수심변이유속으로 분리하여 적용하면,

$$\begin{aligned} w &= \frac{\partial}{\partial x} \int_z^h (\bar{u} + u') \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_z^h (\bar{v} + v') \, dz \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \{ \bar{u}(h - z) \} + \frac{\partial}{\partial y} \{ \bar{v}(h - z) \} + \frac{\partial}{\partial x} \int_z^h u' \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_z^h v' \, dz \end{aligned} \quad (2.45)$$

가 된다. 위의 식에 식 (2.27), (2.28)과 식(2.36)을 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$w = \frac{\partial}{\partial x} \{ \bar{u}(h - z) \} + \frac{\partial}{\partial y} \{ \bar{v}(h - z) \} + \frac{\partial}{\partial x} \int_z^h \sum_{r=1}^M A_r f_r(z) \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_z^h \sum_{r=1}^M B_r f_r(z) \, dz$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \bar{u}h(1 - \xi) \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \bar{v}h(1 - \xi) \right\} + \sum_{r=1}^M \left[ \int_z^h f_r(z) dz \cdot \left\{ \frac{\partial A_r}{\partial x} + \frac{\partial B_r}{\partial y} \right\} \right]. \quad (2.46)$$

여기서,  $\xi = z/h$  이다.

윗 식에서

$$\begin{aligned} \int_z^h f_r(z) dz &= \int_z^h \left( \cos p_k z - \frac{\beta_1}{N p_k} \sin p_k z \right) dz \\ &= \frac{h}{\alpha_k^2} \left\{ (\sin \alpha_k - \sin \alpha_k \xi) + \frac{h \beta_1}{N \alpha_k} (\cos \alpha_k - \cos \alpha_k \xi) \right\} \end{aligned} \quad (2.47)$$

로 표현된다.

## 2.6 모우드수 제한에 따른 보정

수직 좌표계상에서 스펙트랄 기법을 사용하는 3차원 모델은 계산시간의 제한 때문에 사용하는 모우드의 수를 제한할 수 밖에 없다. 유한한 갯수의 모우드를 사용하여 유속단면을 표현하는 경우에 대한 보정이 필요하다. Fig. 2.1에서 보는 바와 같이 높은 모우드일수록  $\alpha_k \rightarrow (k-1)\pi$ 에 접근하게 되므로 식 (2.38)에서  $a_k \rightarrow 0$ 이 된다. 또한,  $\lambda_k = N \alpha_k^2 / h^2 = N (k-1)^2 \pi^2 / h^2$ 이므로  $k \rightarrow \infty$ 이면  $\lambda_k \rightarrow \infty$ 가 된다. 식 (2.34)의 좌변에서 정상상태(Steady state)를 가정하고  $\gamma B_k \approx 0.0$ 라고 하며, 우변에서  $F_b \approx \rho \beta_2 u_h$ ,  $\beta_1 \approx 0$ ,  $\phi_k \approx 2/h$ 라고 하면, 다음과 같이 표현된다.

$$\lambda_k A_k \approx \frac{F_s}{\rho} \phi_k.$$

즉,

$$A_k \approx \frac{F_s \phi_k}{\rho \lambda_k} = \frac{h^2 F_s \phi_k}{\rho N (k-1)^2 \pi^2} = \frac{2h F_s}{\rho N (k-1)^2 \pi^2},$$

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \sum_{k=M+1}^{\cdot} A_k f_k(z) \approx \sum_{k=M+1}^{\cdot} \frac{2h F_s}{\rho N (k-1)^2 \pi^2} \cos(k-1)\pi\xi \\
&= \frac{2h F_s}{\rho N \pi^2} \sum_{k=M}^{\cdot} \frac{\cos k\pi\xi}{k^2} \\
&= \frac{2h F_s}{\rho N \pi^2} \left[ \sum_{k=1}^{\cdot} \frac{\cos k\pi\xi}{k^2} - \sum_{k=1}^{M-1} \frac{\cos k\pi\xi}{k^2} \right] \\
&= \frac{2h F_s}{\rho N \pi^2} \left[ (3\xi^2 - 6\xi + 2) \frac{\pi^2}{12} - \sum_{k=1}^{M-1} \frac{\cos k\pi\xi}{k^2} \right]. \tag{2.48}
\end{aligned}$$

마찬가지로

$$\Delta v = \frac{2h G_s}{\rho N \pi^2} \left[ (3\xi^2 - 6\xi + 2) \frac{\pi^2}{12} - \sum_{k=1}^{M-1} \frac{\cos k\pi\xi}{k^2} \right]. \tag{2.49}$$

### 3. 수치계산식

#### 3.1 External mode

수치계산은 External mode와 Internal modes로 분리하여 수행한다. 식 (2.17)~(2.19)로 표현되는 External mode의 수심평균 2차원 연속, 운동방정식은 양해 유한차분법(Explicit finite difference method), 음해 유한차분법(Implicit finite difference method), 유한요소법(Finite element method) 등을 이용하여 쉽게 구할 수 있다. 본 연구에서는 계산의 편의를 위하여 양해 유한차분법을 사용하였으며, 격자체계는 Staggered grid system인 Arakawa-C grid를 사용하였다(Fig. 3.1 참조). External mode의 수치계산식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \zeta_i(t + \Delta t) = \zeta_i(t) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ h_{ie} \overline{u}_i(t) - h_{iw} \overline{u}_{i-1}(t) \right\} \\ - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left\{ h_{in} \overline{v}_{i-n}(t) - h_{is} \overline{v}_i(t) \right\}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \overline{u}_i(t + \Delta t) = \overline{u}_i(t) + \gamma \Delta t \hat{v}_i(t) - g \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \zeta_{i+1}(t + \Delta t) - \zeta_i(t + \Delta t) \right\} \\ - \frac{\Delta t}{\rho h_{ie}} F_{bi} + \frac{\Delta t}{\rho h_{ie}} F_{si}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \overline{v}_i(t + \Delta t) = \overline{v}_i(t) - \gamma \Delta t \hat{u}_i(t + \Delta t) - g \frac{\Delta t}{\Delta y} \left\{ \zeta_i(t + \Delta t) - \zeta_{i+n}(t + \Delta t) \right\} \\ - \frac{\Delta t}{\rho h_{is}} G_{bi} + \frac{\Delta t}{\rho h_{is}} G_{si}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

여기서,

$$\hat{u}_i(t) = \left\{ \overline{u}_i(t) + \overline{u}_{i-1}(t) + \overline{u}_{i+n}(t) + \overline{u}_{i+n-1}(t) \right\} / 4.0, \quad (3.4)$$

$$\hat{v}_i(t) = \left\{ \overline{v}_i(t) + \overline{v}_{i+1}(t) + \overline{v}_{i-n}(t) + \overline{v}_{i-n+1}(t) \right\} / 4.0, \quad (3.5)$$

$$*_{ie} = \left\{ *_{i-1} + *_{i+1} \right\} / 2.0, \quad (3.6)$$

$$*_{in} = \left\{ *_{i-n} + *_{i-n+1} \right\} / 2.0, \quad (3.7)$$

$$*_{iw} = \left\{ *_{i-1} + *_{i-2} \right\} / 2.0, \quad (3.8)$$



$$*_{is} = \left\{ *_{i} + *_{i+n} \right\} / 2.0, \quad (3.9)$$

$\Delta t$  : 계산시간 간격 (sec.),

$\Delta x$  : x방향 격자크기 (m),

$\Delta y$  : y방향 격자크기 (m),

$n$  : 계산영역 x방향 격자수.

위와 같이 양해 유한차분법을 사용하는 수치계산식에서는 계산의 안정성(Stability)이 계산시간간격, 격자크기, 수심 등을 고려하는 CFL조건(Courant-Friedrichs-Lewy stability condition)에 따른다.

즉,

$$\Delta t \leq \frac{\Delta s}{(gH)^{1/2} + U}. \quad (3.10)$$

여기서,  $\Delta s$  : 최소격자크기,

$H$  : 계산영역내 최대수심,

$U$  : 계산영역내 최대유속

이다. 초기조건으로는 계산영역내의 모든 격자점에서  $\zeta_i = \bar{u}_i = \bar{v}_i = 0$ , at  $t = 0$ 를 가정하였다.

### 3.2 Internal modes

Internal modes에서는 식 (2.34), (2.35)에서  $A_k, B_k$  ( $k = 1, \dots, M$ )의 값을 구한다. 식(2.34), (2.35)에서

$$C_k = \{a_k - f_k(h)\} \frac{F_b}{\rho} + \{1.0 - a_k\} \frac{F_s}{\rho} - \beta_2 N_h f_k(h) - \beta_1 u_o - \lambda_k a_k \bar{u} h, \quad (3.11)$$

$$D_k = \{a_k - f_k(h)\} \frac{G_b}{\rho} + \{1.0 - a_k\} \frac{G_s}{\rho} - \beta_2 N_h f_k(h) - \beta_1 v_o - \lambda_k a_k \bar{v} h \quad (3.12)$$

라고 하면, 각각

$$\frac{\partial A_k}{\partial t} - \gamma B_k + \lambda_k A_k = C_k \phi_k \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial B_k}{\partial t} + \gamma A_k + \lambda_k B_k = D_k \phi_k \quad (3.14)$$

와 같이 표현된다. 따라서, 수치계산식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$A_{k,i}(t + \Delta t) = A_{k,i}(t) + \Delta t \{ \gamma \hat{B}_{k,i}(t) - \lambda_k A_{k,i}(t) + C_{k,i}(t) \phi_k \}, \quad (3.15)$$

$$B_{k,i}(t + \Delta t) = B_{k,i}(t) + \Delta t \{ -\gamma \hat{A}_{k,i}(t + \Delta t) - \lambda_k B_{k,i}(t) + D_{k,i}(t) \phi_k \}. \quad (3.16)$$

여기서,

$$\hat{A}_{k,i}(t) = \{A_{k,i}(t) + A_{k,i-1}(t) + A_{k,i+n}(t) + A_{k,i+n-1}(t)\}/4.0, \quad (3.17)$$

$$\hat{B}_{k,i}(t) = \{B_{k,i}(t) + B_{k,i+1}(t) + B_{k,i-n}(t) + B_{k,i-n+1}(t)\}/4.0. \quad (3.18)$$

위의 식에서 Heaps(1972)는 Holsters(1962)에 의거하여,  $\lambda_k$  값이 아주 커질 경우 Frictional damping term에서 계산의 불안정성(Computational instability)이 나타나는 것을 방지하기 위하여 아래와 같이 시간좌표상의 중간차분(Centered difference)형태를 취하였다. 즉,

$$\lambda_k A_{k,i}(t) \rightarrow \lambda_k \{A_{k,i}(t + \Delta t) + A_{k,i}(t)\}/2.0, \quad (3.19)$$

$$\lambda_k B_{k,i}(t) \rightarrow \lambda_k \{B_{k,i}(t + \Delta t) + B_{k,i}(t)\}/2.0. \quad (3.20)$$

수직 좌표상의 유속성분은 식 (2.36), (3.15), (3.16)을 이용하여 식 (2.27), (2.28)로부터 구한다.

$$u'(x, y, \xi, t) = \sum_{k=1}^M A_k \left[ \cos \alpha_k \xi - \frac{h \beta_1}{N \alpha_k} \sin \alpha_k \xi \right], \quad (3.21)$$

$$v'(x, y, \xi, t) = \sum_{k=1}^M B_k \left( \cos \alpha_k \xi - \frac{h\beta_1}{N \alpha_k} \sin \alpha_k \xi \right) \quad (3.22)$$

여기서,  $\xi = z/h$ .

계산의 초기조건으로는

$$A_{k,i} = B_{k,i} = 0 \quad \text{at } t = 0 \quad (3.23)$$

를 준다.

#### 4. Heap's Basin에서의 실험

Heaps(1972)는 North Sea 규모의 일정수심 장방형 Basin에 3차원 스펙트랄 모델을 적용하여 취송류의 순환을 재현한 바 있다. 본 연구는 Heaps(1972)와 계산결과를 비교하기 위하여 먼저 그와 동일한 조건하에서 수치실험을 실시하였으며, 계산의 기본조건은 Table 4.1과 같다.

Table 4.1 Heaps(1972)의 계산조건

계산영역	400 km × 800 km
계산격자수	9 × 17
격자크기(Δx, Δy)	400/9 km, 800/17 km
수심	65.0 m
Coriolis 계수	0.44 h <sup>-1</sup>
바람응력	0.0 N/m <sup>2</sup> , -1.5 N/m <sup>2</sup>
해수밀도(ρ)	1025.0 kg/m <sup>3</sup>
중력가속도(g)	9.81 m/s <sup>2</sup>

계산에 사용된 격자망은 Fig. 4.1과 같다. Heaps(1972)는 계산시간 간격은 Δt = 180초, 모우드수 M = 10으로 총 300시간(6000 계산단계)동안 계산을 수행하였으며, 해저 마찰계수 k = 0.002 m/s, 수직 와점성계수 N = 0.0130, 0.0325, 0.0650, 0.1300, 0.2600 m<sup>2</sup>/s에 대한 실험과, N = 0.0650 m<sup>2</sup>/s, k = 0.001, 0.002, 0.004 m/s에 대한 실험에서 수직 와점성계수와 해저마찰계수에 따른 해수면 변이, 유속의 수직구조 등을 비교, 검토하였다.

본 모델에서는 계산시간 간격을 External mode의 경우  $\Delta t = 180$ 초, Internal modes의 경우  $\Delta t = 1800$ 초로 하여 External mode 10회 계산마다 1회의 Internal modes 계산이 이루어지도록 하였다. Davies(1985)는 External mode와 Internal modes의 계산시간 간격을  $\Delta t_i = n \Delta t_e$ 에서  $n$ 을 4~10으로 준 바 있다.

본 모델의 특징중의 하나는 Sturm-Liouville system에서 Eigenfunction의 해를 구하는 데 있어서 Heaps(1972)가 Stress boundary condition에 선형 해저마찰계수  $k$ 를 그대로 사용하여 계산의 편리를 도모한 데 비해  $\beta_1, \beta_2$ 라는 특정계수를 사용하여  $\beta_1, \beta_2$ 값을 임의로 줄 수 있을 뿐만 아니라 해저 마찰 응력의 계산에서 Quadratic friction law의 사용을 가능케 한 데 있다.  $\beta_1 = 0.0, \beta_2 = 0.0$ 으로 주고 Eigenfunction의 해를 구하는 경우는 Davies(1982)가 사용한 방법으로서 제1모우드가 수심평균 유속을 나타내고 나머지 모우드가 수심변이 유속을 나타내며, 제2모우드 이상의 수심평균은 0이 되어 자동적으로 모우드 분리가 이루어지기 때문에 모우드 분리기법은 그 의미를 잃게 된다. 다만 이 경우 해저마찰이 커지면 해저면 가까이의 유속 구조가 불안정해진다. 본 연구에서는 우선  $\beta_1$ 의 값을 0으로 주고 해저면에서  $\beta_2$ 에 따른 유속단면 변화를 집중적으로 검토하였다.

Fig. 4.2는 수직와점성 계수  $N = 0.065\text{m}^2/\text{s}$ ,  $k = 0.002 \text{ m/s}$ 로 주고 계산한 C점(Fig. 4.1)에서의 Heaps 모델 해수면 변이와  $N$  및  $k$ 는 마찬가지로 주고  $\beta_2$ 의 값을  $\beta_2 = 0.0, 0.002, 0.02, 0.2$ 로 준 본 모델의 계산결과, 그리고 수심적분 2차원 모델의 결과를 함께 도시한 것이다.  $\beta_2 = 0.0$ 으로 준 경우, Heaps 모델의 결과에 가장 유사하고  $\beta_2$ 의 값이 커질수록 수심적분 2차원 모델의 결과에 접근한다. 그림에서 계산초기에 나타나는 진동형태는 Heaps(1972)가 지적한 대로 주어진 바람응력에 반응하는 Basin의 길이 방향 고유진동으로써 그 주기는 약 19.2시간이다. 2차원 모델의 경우는 이와 같은 고유진동의 진폭을 제대로 계산하지 못할 뿐더러 정상상태에 도달한 해수면도 3차원 모델의 결과보다 훨씬 낮게 계산함을 볼 수 있다. Fig. 4.3은 위의 계산 결과에서 Basin의 중심부인 B점에서의 수평유속 성분의 수직구조를 도시한 것이다.  $\beta_2 = 0.0$ 인 경우  $U, V$  유속단면은 모두 Heaps 모델의 결과에 일치한다.  $\beta_2$ 의 값이 커질수록 표면유속, 해저면유속 모두 작아지며, 특히 해저면 유속이  $\beta_2$ 의 값에 민감하다.  $\beta_2 = 0.2$ 인 경우

해저면 유속은 거의 0에 가깝다.

본 모델을 검증함에 있어서 비교할만한 현장관측자료는 확보할 수 없었으며, 사실 해양에 있어서 바람응력과 해수면 유속, 해저면 마찰과 해저면 유속간의 관계는 아직도 많은 연구가 이루어져야 하고 정밀한 관측 수단이 개발되어야 할 분야이기 때문에 현장관측을 통한 정확한 검증은 사실상 어렵다고 할 수 밖에 없다. 따라서, 부득이 기존의 Heaps(1972)가 수행한 연구결과와 비교, 검토하는 것으로 검증과정을 대신하였으며, 이 결과 본 모델은 Heaps(1972)의 계산결과와 거의 일치하였고 계수들의 조정에 따라 다양한 재현 상태를 보여 주었다. 뿐만 아니라 본 모델 개발의 본래 목적인 계산속도 단축면에서 매우 탁월한 효과를 나타냈다.

Fig. 4.4는  $\beta_2 = 0.0$ 로 두고, Linear friction law를 사용하고  $k = 0.002$ 로 준 경우와 Quadratic friction law를 사용하고  $K = 0.002, 0.01, 0.016, 0.024$  등으로 변화시켜 계산한 C점에서의 해수면 변이이다. Davies(1985)는  $k$ 와  $K$ 의 관계를 다음 식으로 표현한 바 있다 .

$$k = 4 KU/\pi . \quad (4.1)$$

여기서,  $k$  : 선형 관계식에서의 해저면 마찰계수(cm/s),

$K$  : 비선형 관계식에서의 해저면 마찰계수,

$U$  : 유속의 진폭.

그림에서  $K$ 의 값을  $k$ 와 같게  $K = 0.002$ 로 준 경우 Damping이 매우 약하여 진동이 오랜동안 지속되었고  $K = 0.024$ 보다 큰 경우는 Overflow가 발생하였다.  $K = 0.024$ 인 경우 Damping의 속도가 지나치게 빨랐고 정상상태의 해수면도  $k = 0.002$ 인 경우 보다 높게 계산되었다.  $K = 0.016$ 으로 준 경우는  $k = 0.002$ 인 경우의 해수면 변이와 거의 일치하였는데 Fig. 4.3에서 해저면 유속을 0.1 m/s로 보면  $k = 0.002$ 인 경우  $K$ 의 값이 0.016에 가깝게 표현되는 것으로 보아 식 (4.1)이 타당성이 있다고 보여진다. 다만 Davies(1985)는  $K$ 의 값은 0.002~0.005가 전형적이라고 보았으며, 이 경우  $k$ 의 값은 0.00025~0.00064로 나타나 Heaps(1972)가 사용한  $k = 0.002$ 와는 상당한 차이가 있다. Fig. 4.5는 위에서 계산한 경우의 수직 유속 구조를 나타낸 것이다. 여기에서도  $k = 0.002$ 인 경우와  $K = 0.016$ 인 경우가 거의 일치한다.  $K$ 의 값이 작아지는 경우 해저면 유속의

값은  $U, V$  모두에서 커지나 표면유속은 바람응력 방향인  $V$ 의 경우 큰 차이가 없고  $U$ 방향은  $K$ 의 값이 작을수록 커진다.  $K = 0.024$ 인 경우를 보면 해저면 가까이에서 유속구조가 불안정한 형태를 나타낸다.

Fig. 4.6 및 Fig. 4.7은  $\beta_2 = 0.002$ 로 주고  $k$  및  $K$  값에 따른 변화를 표현한 것이다. Fig. 4.6에서 Fig. 4.4와는 달리 거의 모든 경우에 약한 진동이 오랫동안 지속되나 Fig. 4.7에서는 Fig. 4.5에서와는 달리  $K$ 의 값이 큰 경우에도 해저면 가까이에서 유속구조의 불안정이 나타나지 않았다. Fig. 4.8, Fig. 4.9는 해저면 마찰응력이 강할 때( $K = 0.24$ ),  $\beta_2$ 값에 따른 해수면 변이 및 유속 단면을 표현한 것이다. 해수면 변이에서는  $\beta_2 = 0.02$ 인 경우 안정된 상태를 보여주었고, 유속단면에서도  $\beta_2$ 의 값이 클수록 유속단면이 안정된 반면  $\beta_2 = 0.0$ 인 경우는 해저면 가까이에서 불안정한 모습을 보였다. 이상에서 고찰해본 바와 같이  $\beta_2$ 의 값은 해저면 마찰계수  $k$  또는  $K$ 의 값에 따라 다르게 주어져야 하며, 이 값들 사이에는 어느 정도 비례 관계가 존재함을 알 수 있다.

Fig. 4.10은  $k = 0.002, \beta_2 = 0.002, N = 0.065$ 인 경우 최종상태의  $U, V$  유속 단면 및  $V$ 의 각 모우드별 유속단면을 도시한 것이다.  $U, V$  유속단면에서 바람응력이 가해지는 방향인  $V$ 는 해수면에서 유속구배가 크며, 전체적으로 비대칭인 반면 바람응력이 가해지지 않는 방향인  $U$ 는 좀더 대칭형에 가깝다.  $V$ 모우드별 유속단면에서 두번째와 세번째 모우드 크기만  $10 \text{ cm/s}$  이상이고 나머지 모우드의 크기는 모두 수  $\text{cm/s}$  이내로써 3~4개의 모우드가 전체적인 유속구조를 거의 결정함을 보여준다. Fig. 4.11은 계산의 최종상태에서 층별 수평유속의 분포를 표현한 것이다. 해수면에서는 바람응력과 f-plane 효과에 의해 흐름의 방향이 남남서 방향이며, 해저면에서는 이와는 반대방향의 흐름이 잘 나타난다. 수심평균 유속 분포에서는 Heaps(1972)가 지적한 대로 Basin의 내부에서는 매우 약한 Uniform flow가 나타나며, 측면경계 가까이에서는 이를 보상하는 상당히 강한 반대 방향 흐름이 나타난다. 이에 따라 Basin의 남부와 북부에 각각 하나씩의 대규모 와류가 존재한다.

Fig. 4.12에 제시된 최종상태의 등수면선은 바람이 불어가는 방향인 Basin 남쪽에서 Setup이 일어나고 북부에서 해수면의 Depression이 일어나는 것을 잘 나타내주며, f-plane 효과에 의해 전체적으로 서측 해수면이 약간 높게 나타난다.

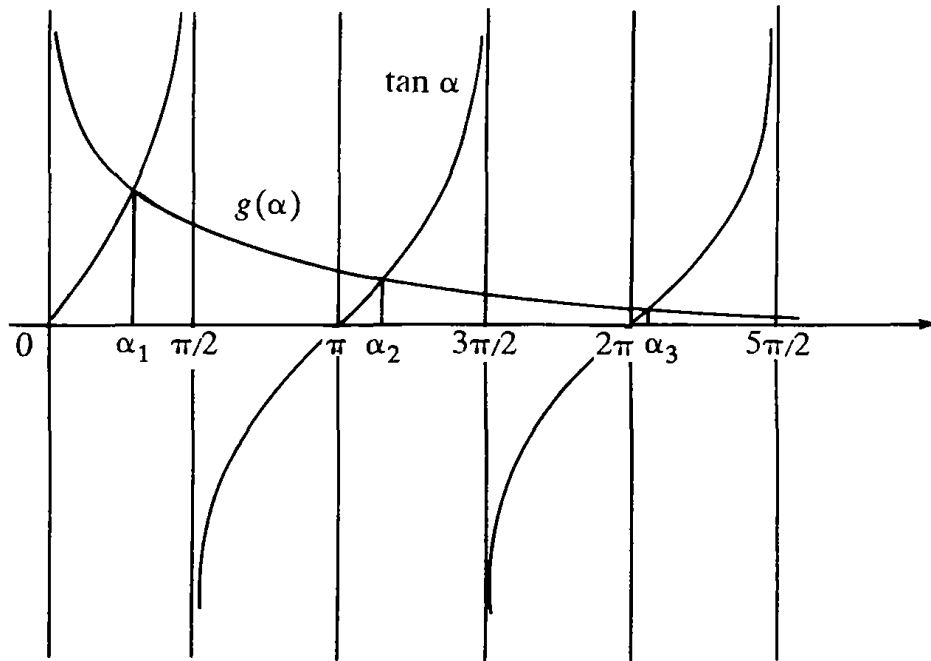
## 5. 결론 및 토의

Heaps(1972)의 3차원 Galerkin 함수 이용 모델에 External mode와 Internal modes를 분리하여 계산하는 모우드 분리 기법을 적용하여 모우드 분리형 3차원 Galerkin 함수이용 모델을 개발하였다. 모델의 검증을 위해 Heaps(1972)가 사용한 일정수심 장방형 Basin(Heaps' basin)에 적용하여 그 결과를 비교, 검토하였으며 이 결과 개발된 모델은 Heaps 모델에서 제약이 되었던 Quadratic friction law의 적용이 가능해졌을 뿐만 아니라 계산속도가 현저히 증대되어 실제 현장에 적용되었을 경우 그 경제성이 매우 뛰어날 것으로 보인다. 그러나, 실제 해양에 본 모델을 적용함에 있어서는 관측을 통한 바람응력과 해수면유속, 해저면 마찰과 해저면 유속의 관계 정립, 수직와점성 계수의 다양한 수직구조를 계산에 반영하는 문제, 성층된 해양에서 밀도의 수직분포에 따른 계산 등 많은 문제가 해결되어야 하며 이를 위해서는 이 분야에 대한 지속적인 연구가 필요하다.

## 참 고 문 헌 (References)

- Davies, A.M. 1982. Formulating a three-dimensional hydrodynamic sea model using a mixed Galerkin-Finite difference method. Proc. of the 4th Int. Conf. on Finite Elements in Water Resources, Hanover, 1982, K.P. Holz. et. al., pp 5-27 to 5-41, Springer-Verlag.
- Davies, A.M. 1985. A three-dimensional model of wind induced flow in a sea region. Prog. Oceanog. Vol. 15, pp 71-128, 1985.
- Ekman, V.W. 1905. On the influence of the earth's rotation on ocean-currents. Arkiv joer Matematik, Astronomioch Fysic, 2,(11).
- Gordon, R.L. 1982. Coastal ocean current response to storm winds. J. of Geophysial Res., 87, 1939-1951.
- Heaps, N.S. 1972. On the numerical solution of the three-dimensional hydrodynamical equations for tides and storm surges. Memoires de al Societe Royale des Sciences de Liege, Ser 6, 2, 143-180.





$$g(\alpha) = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\frac{N\alpha}{h} + \frac{\beta_1 \beta_2}{N\alpha/h}}$$

Fig. 2.1 Eigenfunction의 해

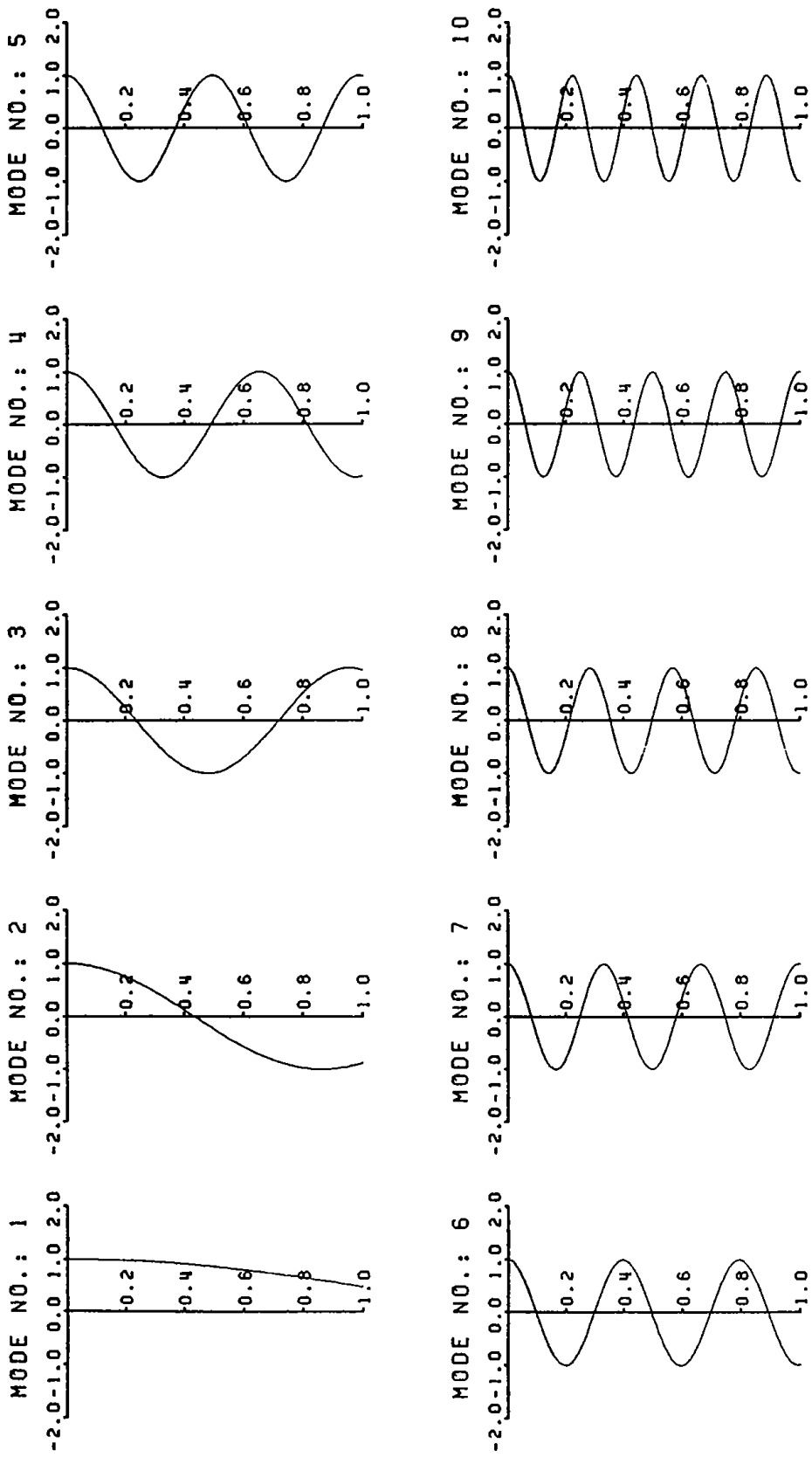
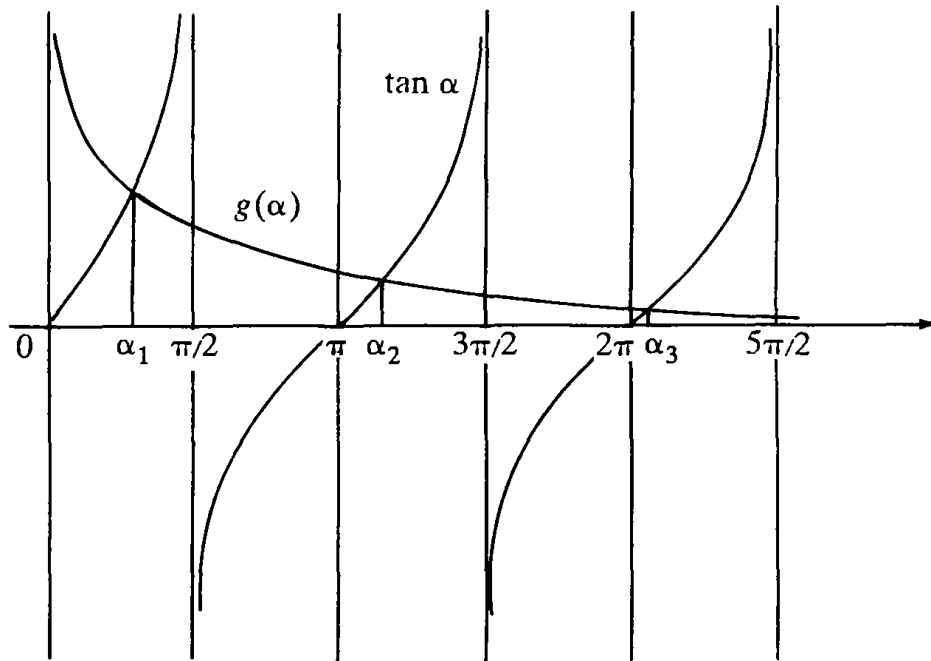


Fig. 2.2 Eigenfunction의 형태



$$g(\alpha) = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\frac{N\alpha}{h} + \frac{\beta_1 \beta_2}{N\alpha/h}}$$

Fig. 2.1 Eigenfunction의 해

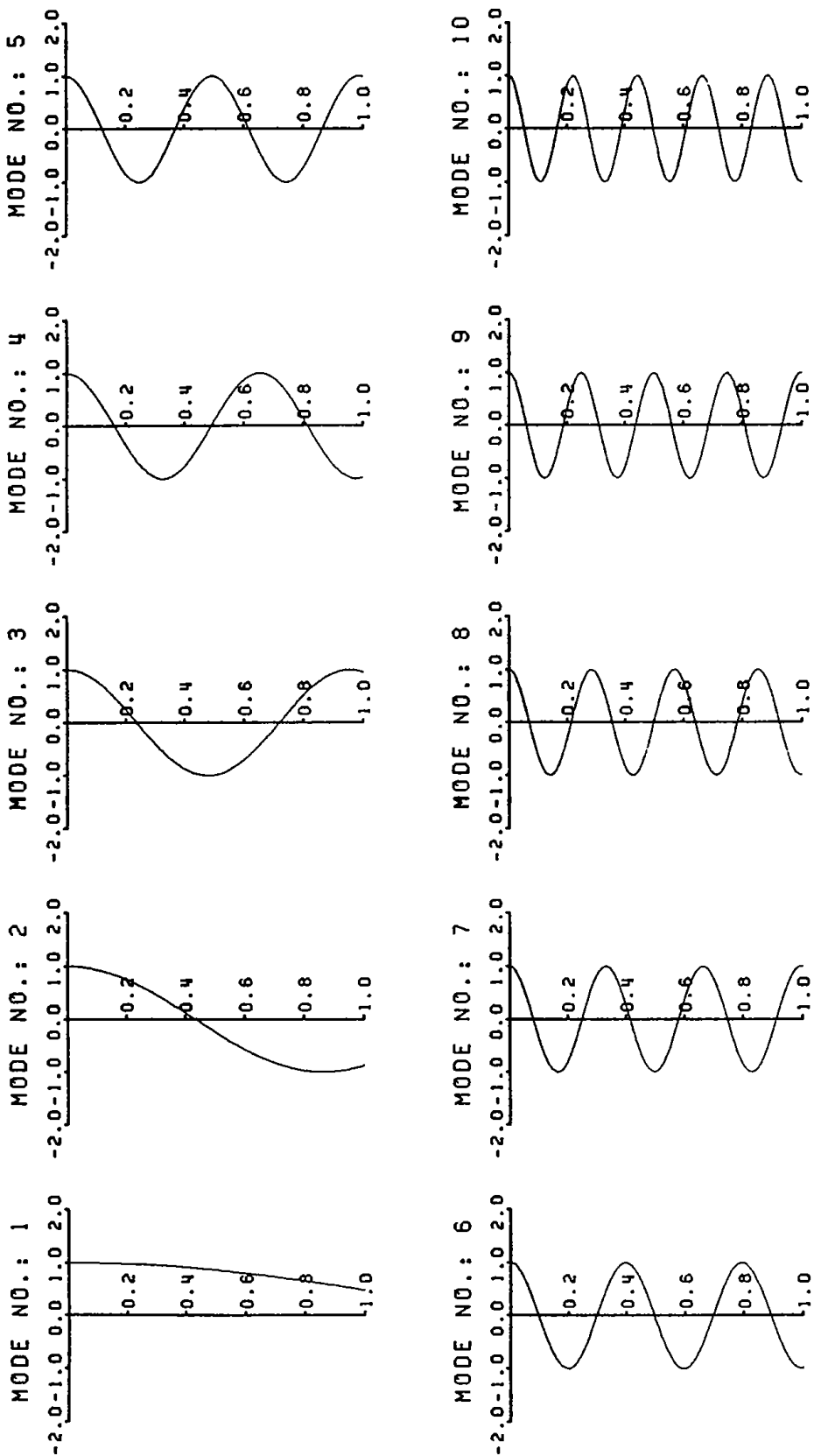


Fig. 2.2 Eigenfunction의 형태

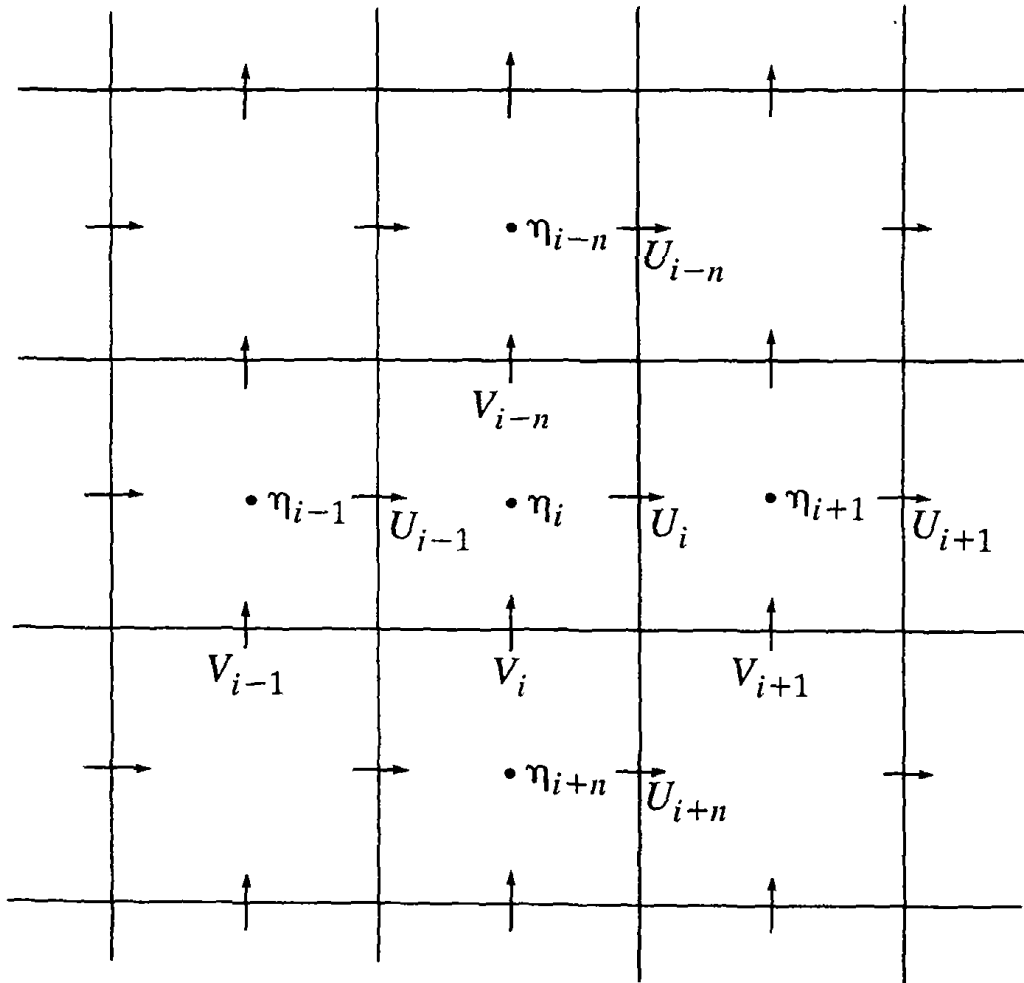


Fig. 3.1 Staggered grid system

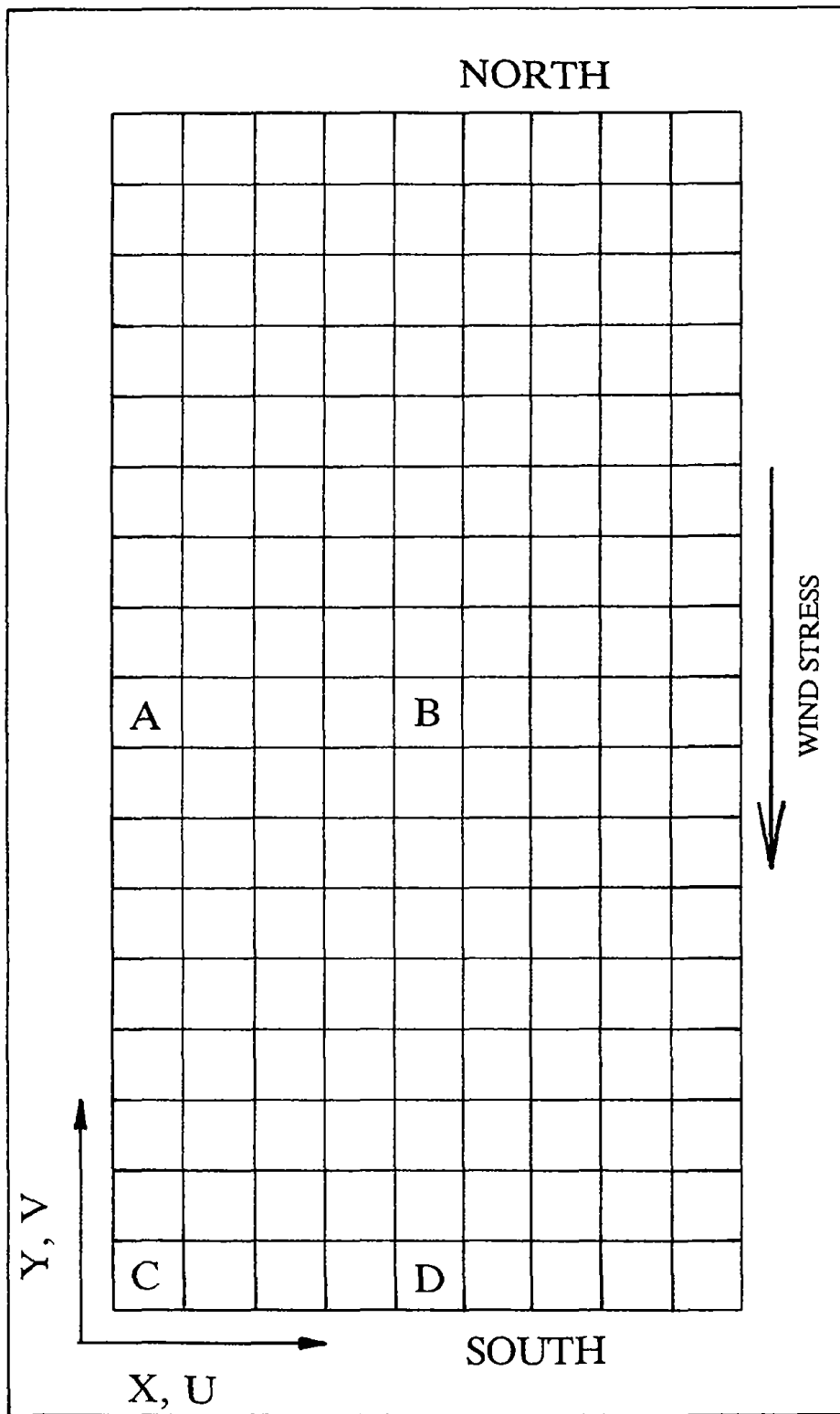


Fig. 4.1 Heaps' Basin 계산격자망

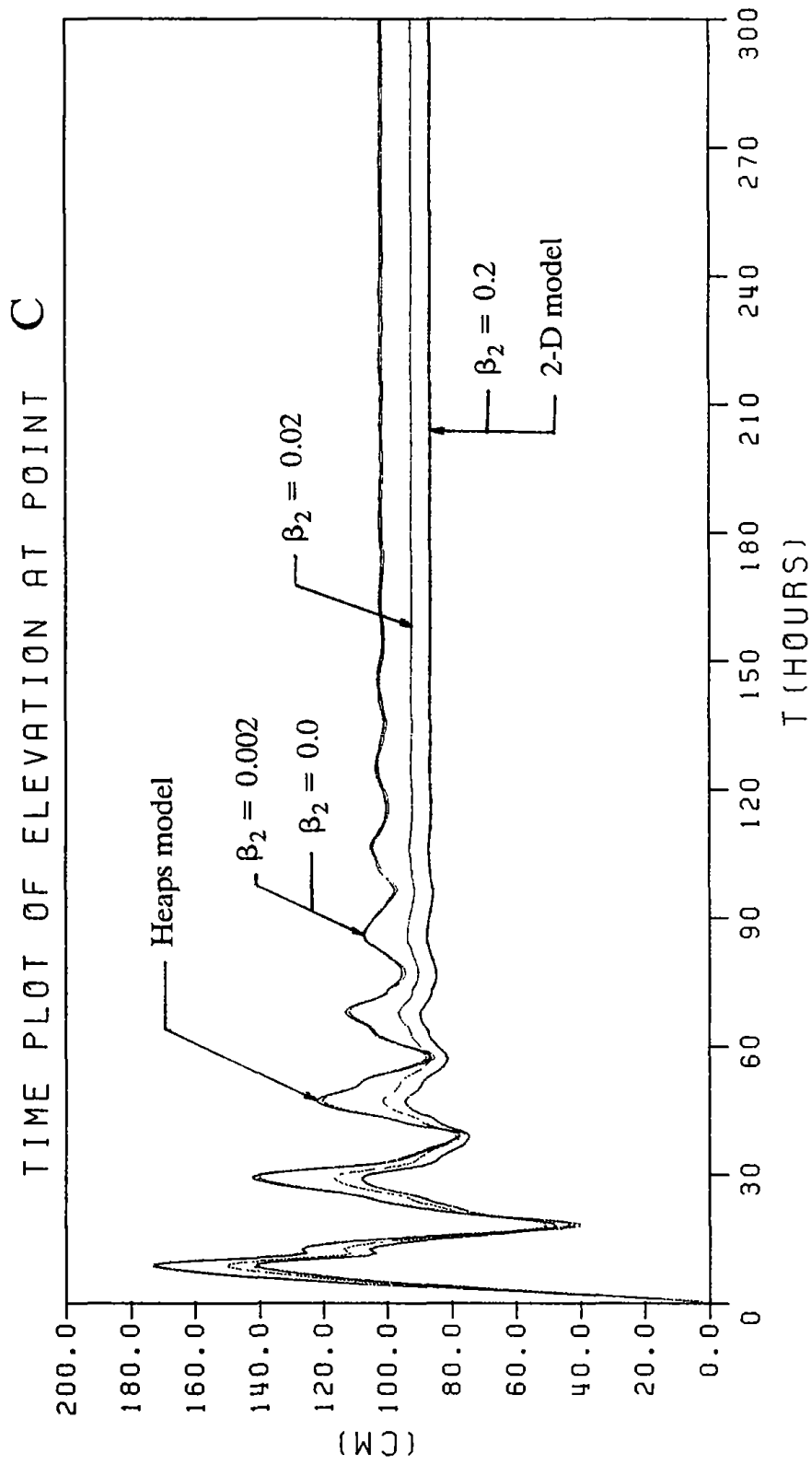


Fig. 4.2  $\beta$  값에 따른 해수면 변이 비교

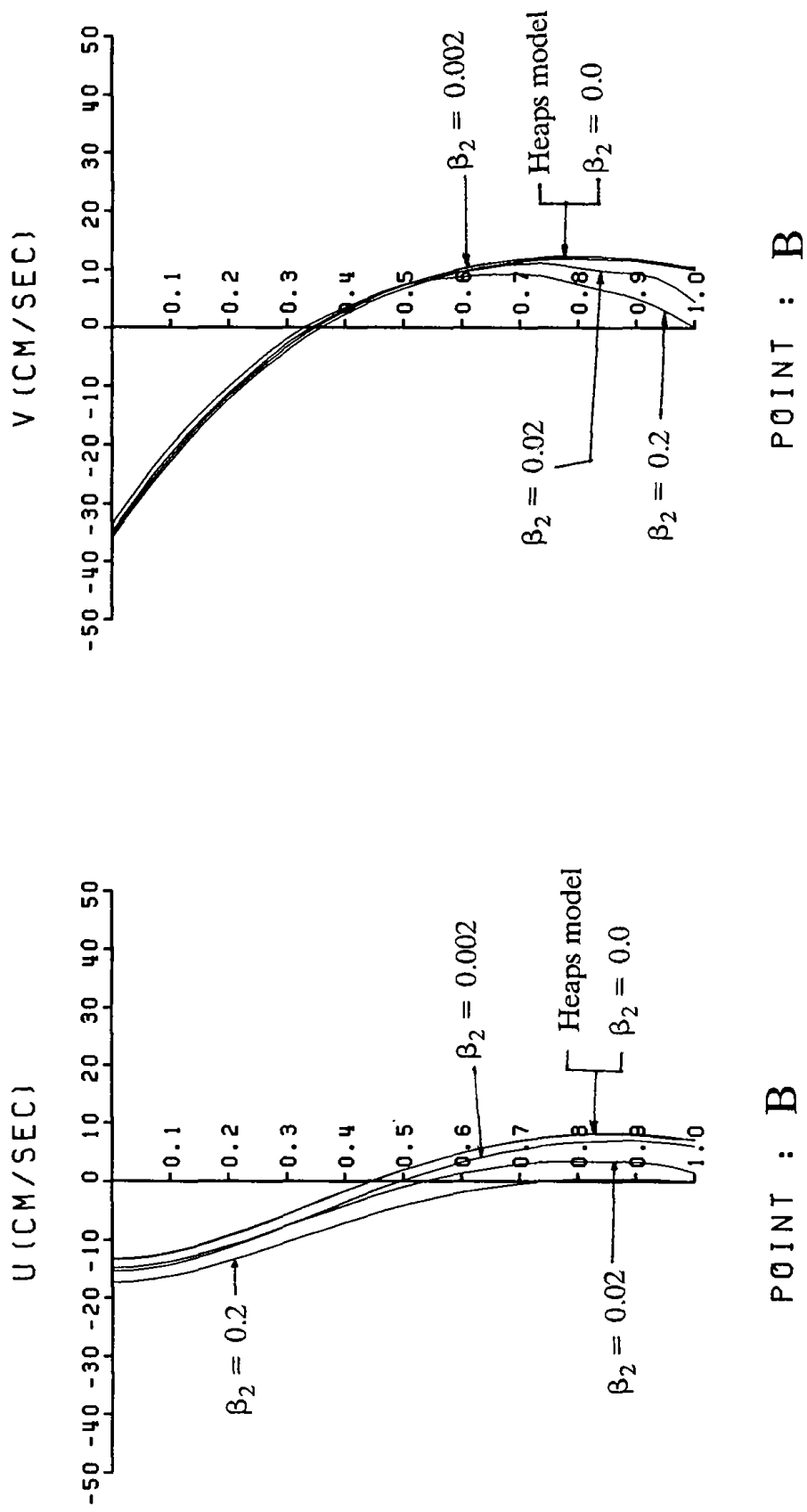


Fig. 4.3  $\beta$  값에 따른 수평유속의 수직단면 비교



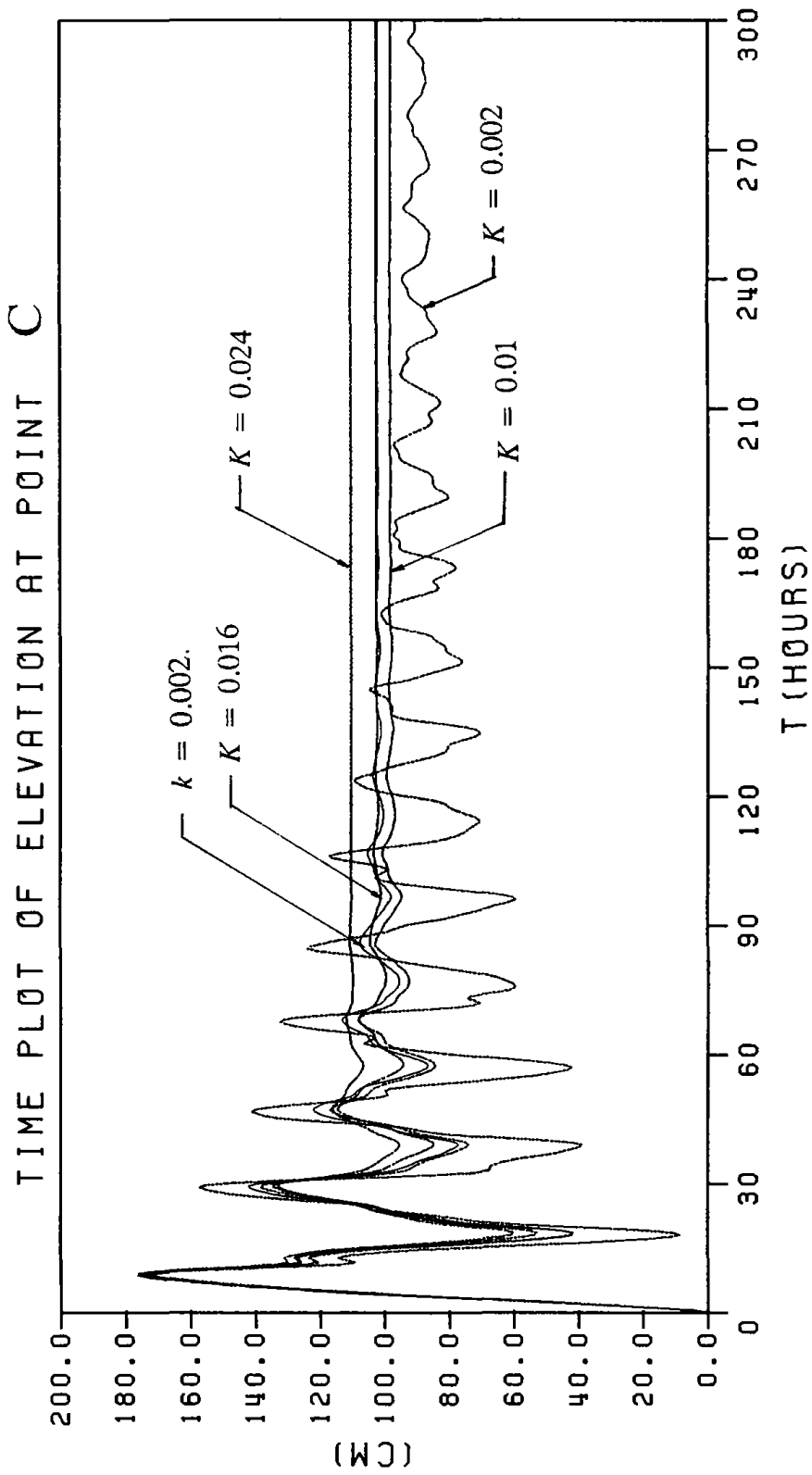
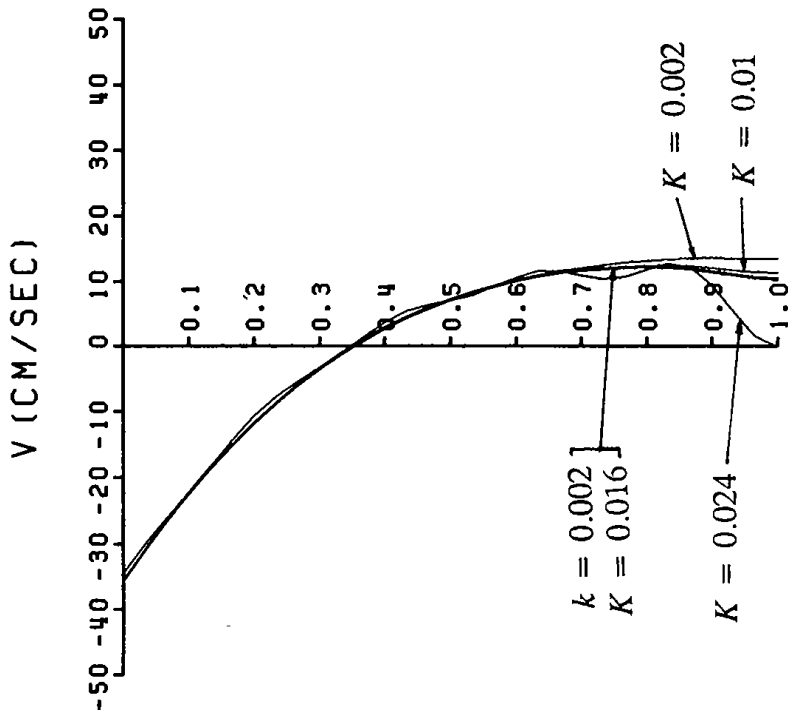
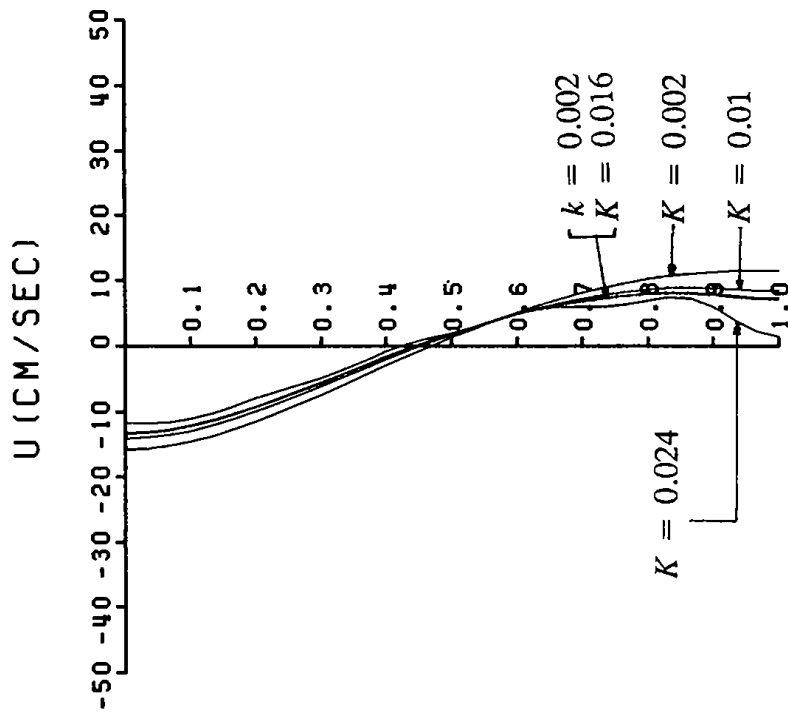


Fig. 4.4  $\beta = 0.0$ 인 경우 해저마찰계수에 따른 해수면 변이 비교



POINT : B



POINT : B

Fig. 4.5  $\beta = 0.0$ 인 경우 해저마찰계수에 따른 유속단면 비교

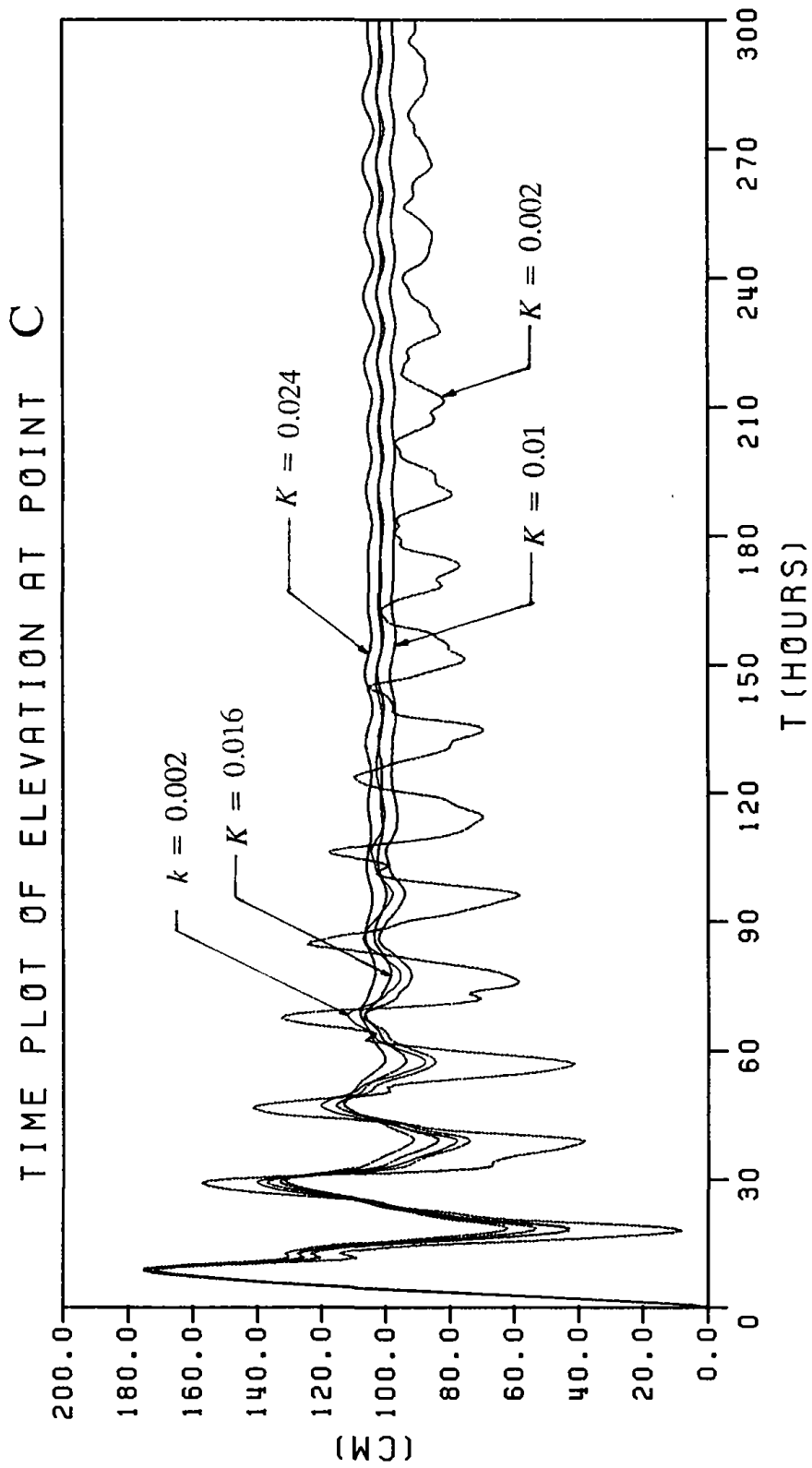
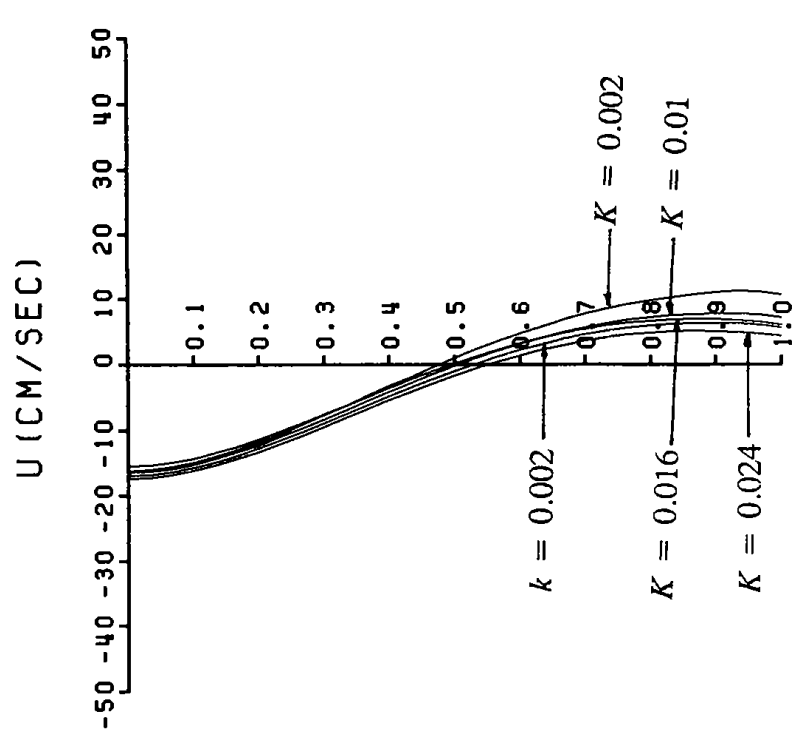
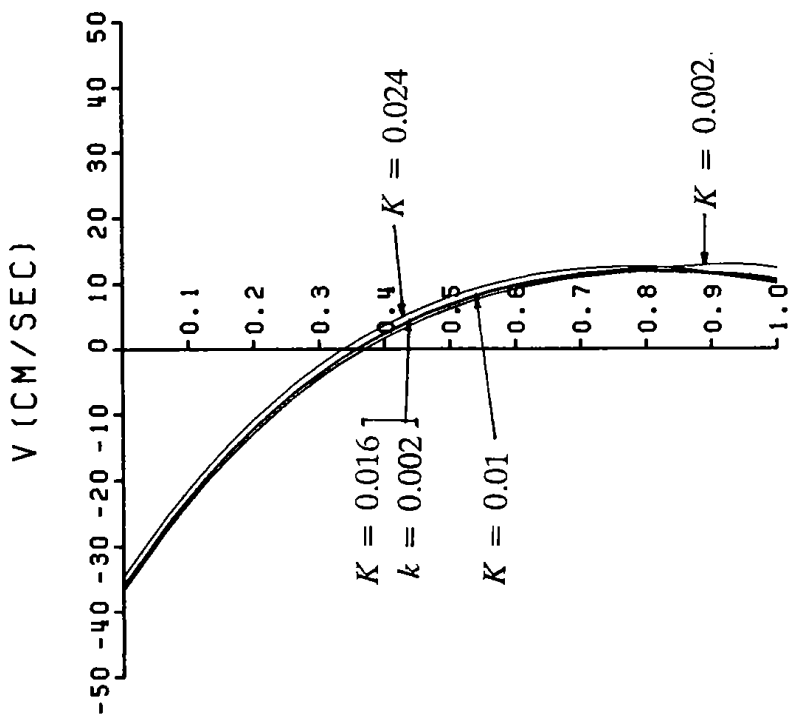


Fig. 4.6  $\beta = 0.002$ 인 경우 해저마찰계수에 따른 해수면 변이 비교



POINT : B

POINT : B

Fig. 4.7  $\beta = 0.002$ 인 경우 해저마찰계수에 따른 유속단면 비교

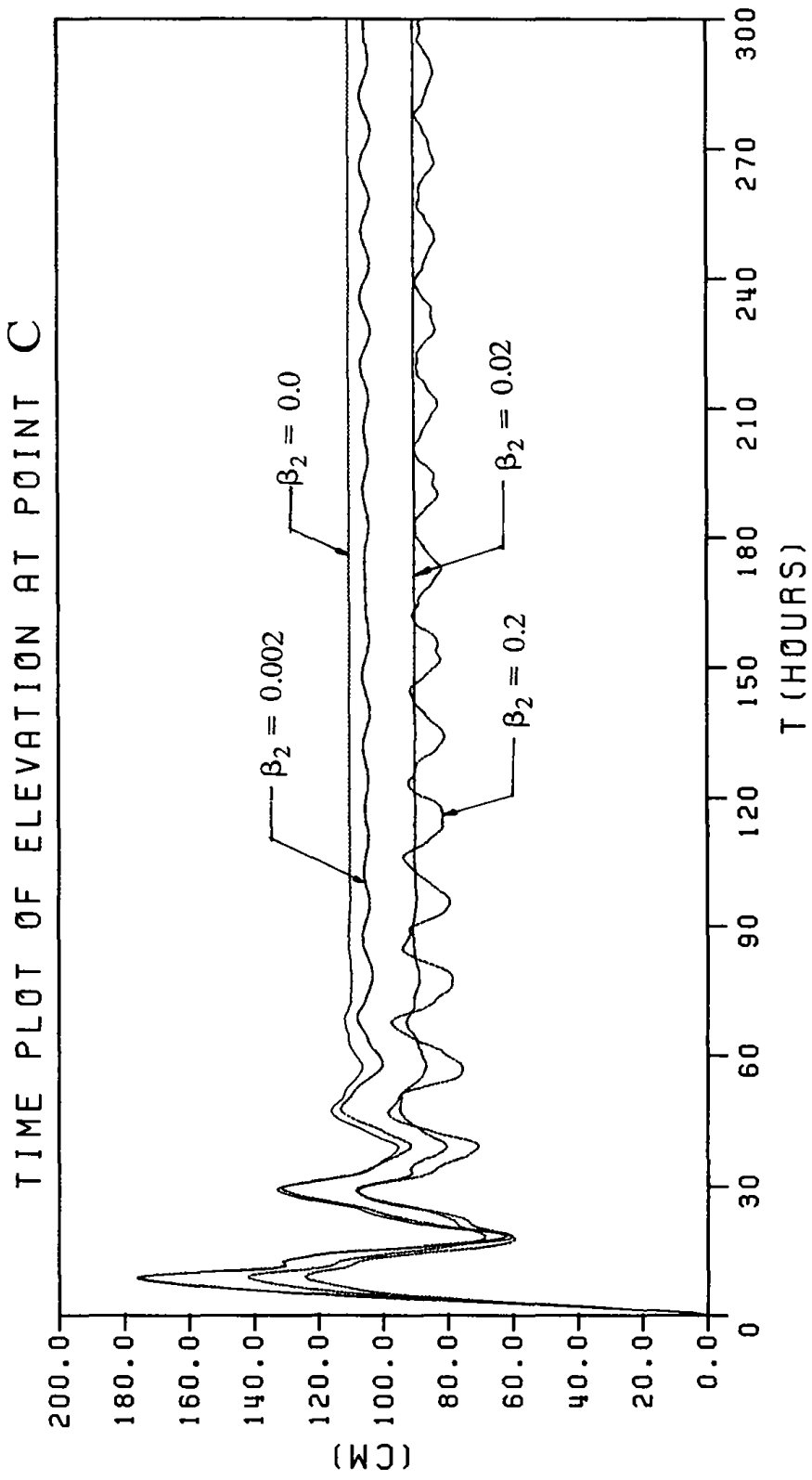
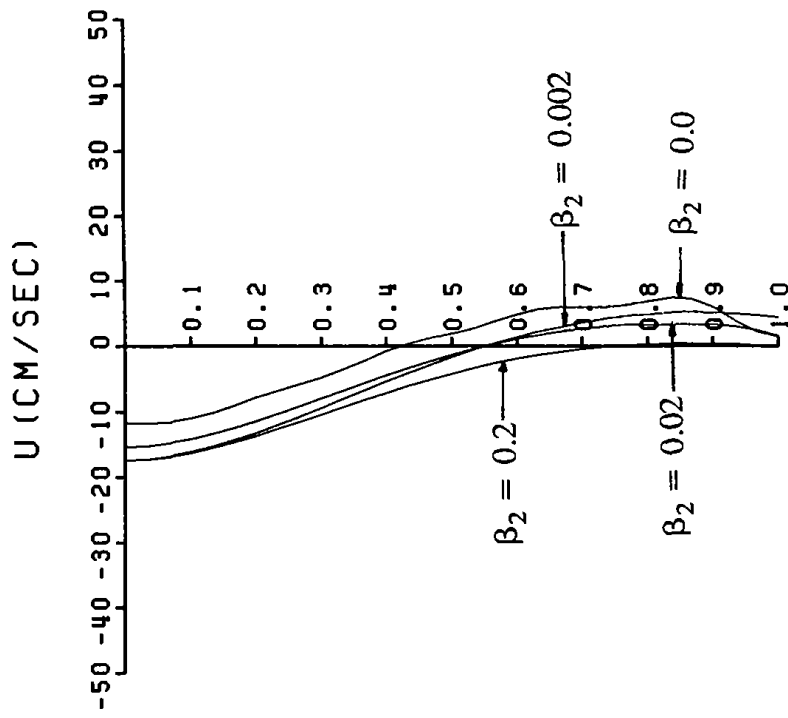
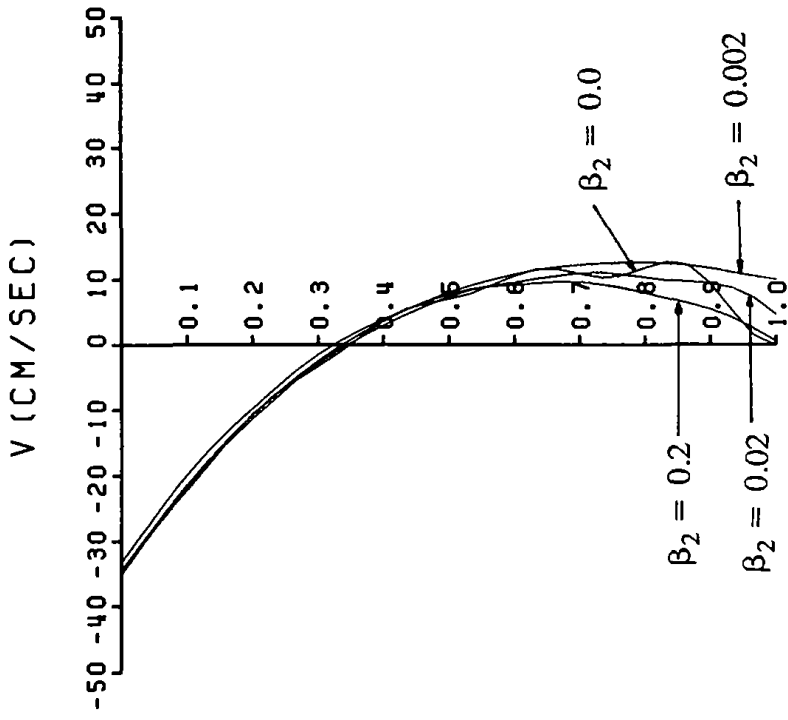


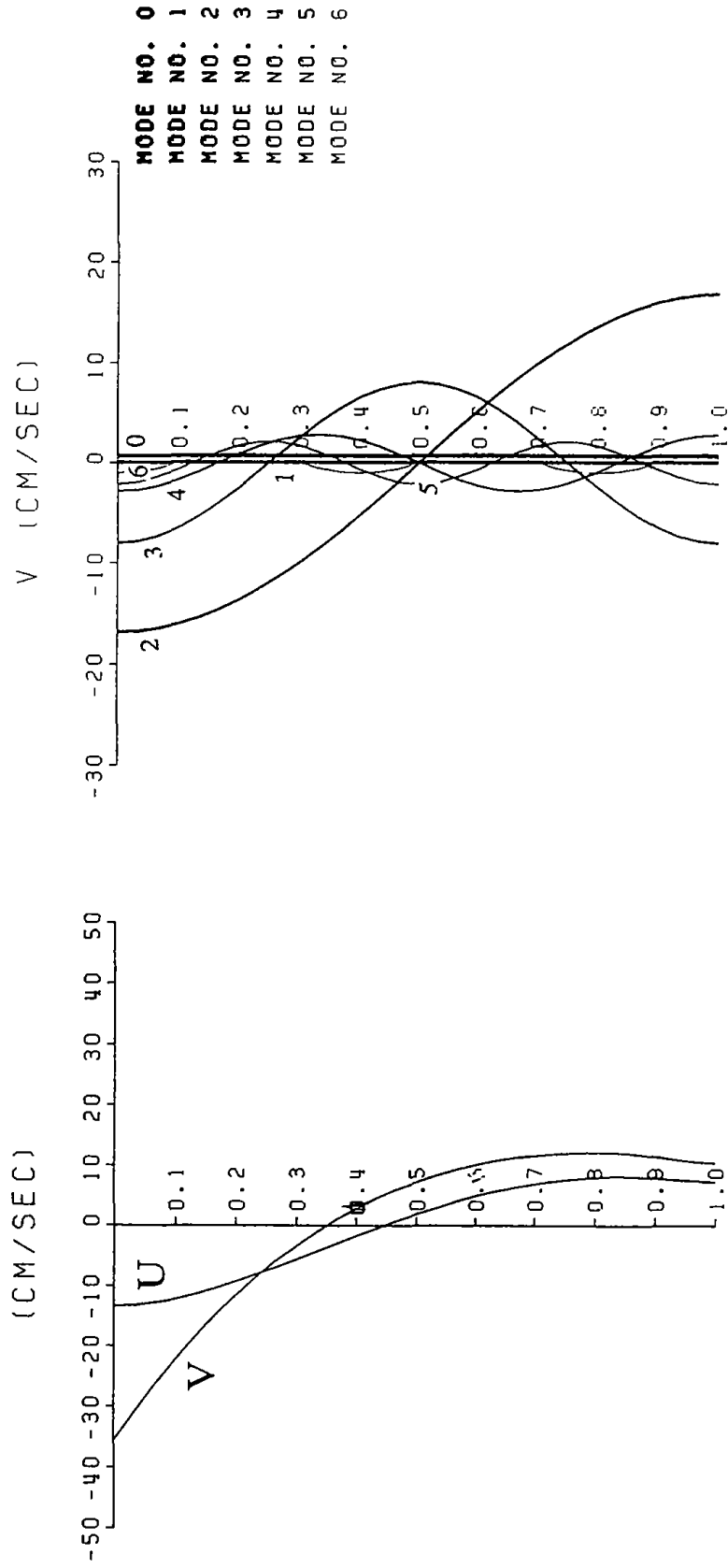
Fig. 4.8 해저면 마찰이 강할 때  $\beta_2$  값에 따른 해수면 변이 비교



POINT : B

POINT : B

Fig. 4.9 해저면 마찰이 강할 때  $\beta_2$  값에 따른 유속단면 비교



POINT B

POINT B

Fig. 4.10 U, V 유속단면 및 V방향 모우드별 유속 구조

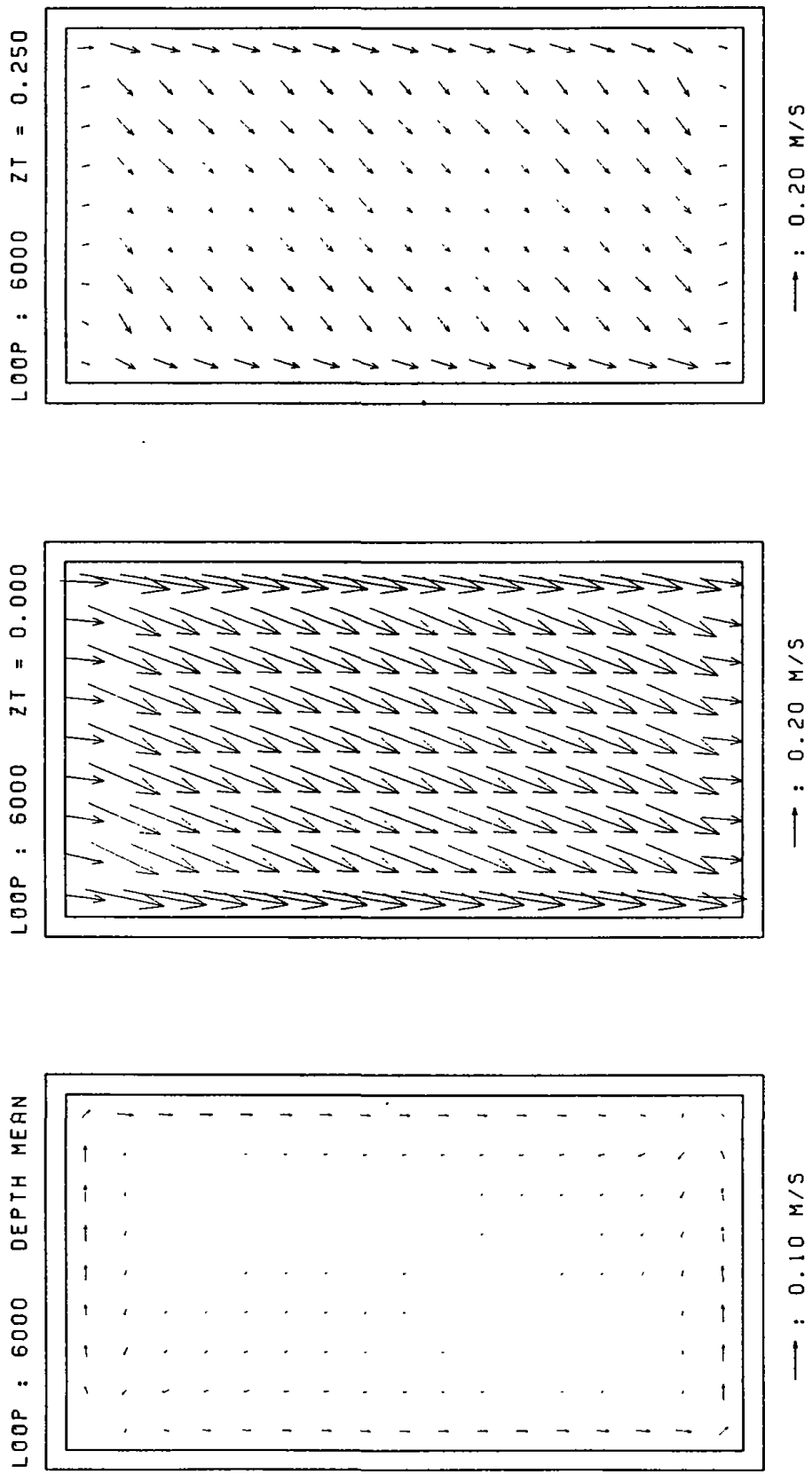
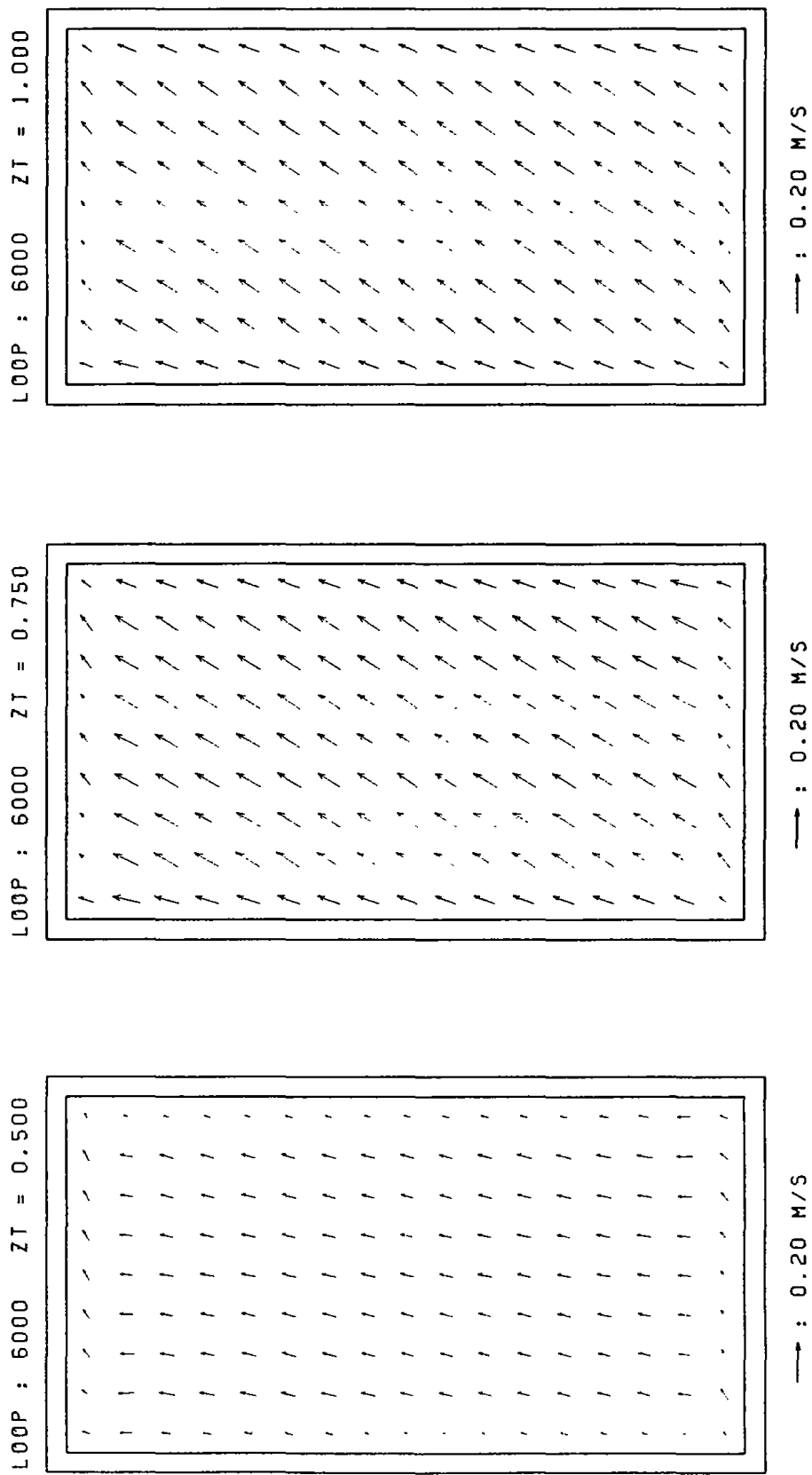


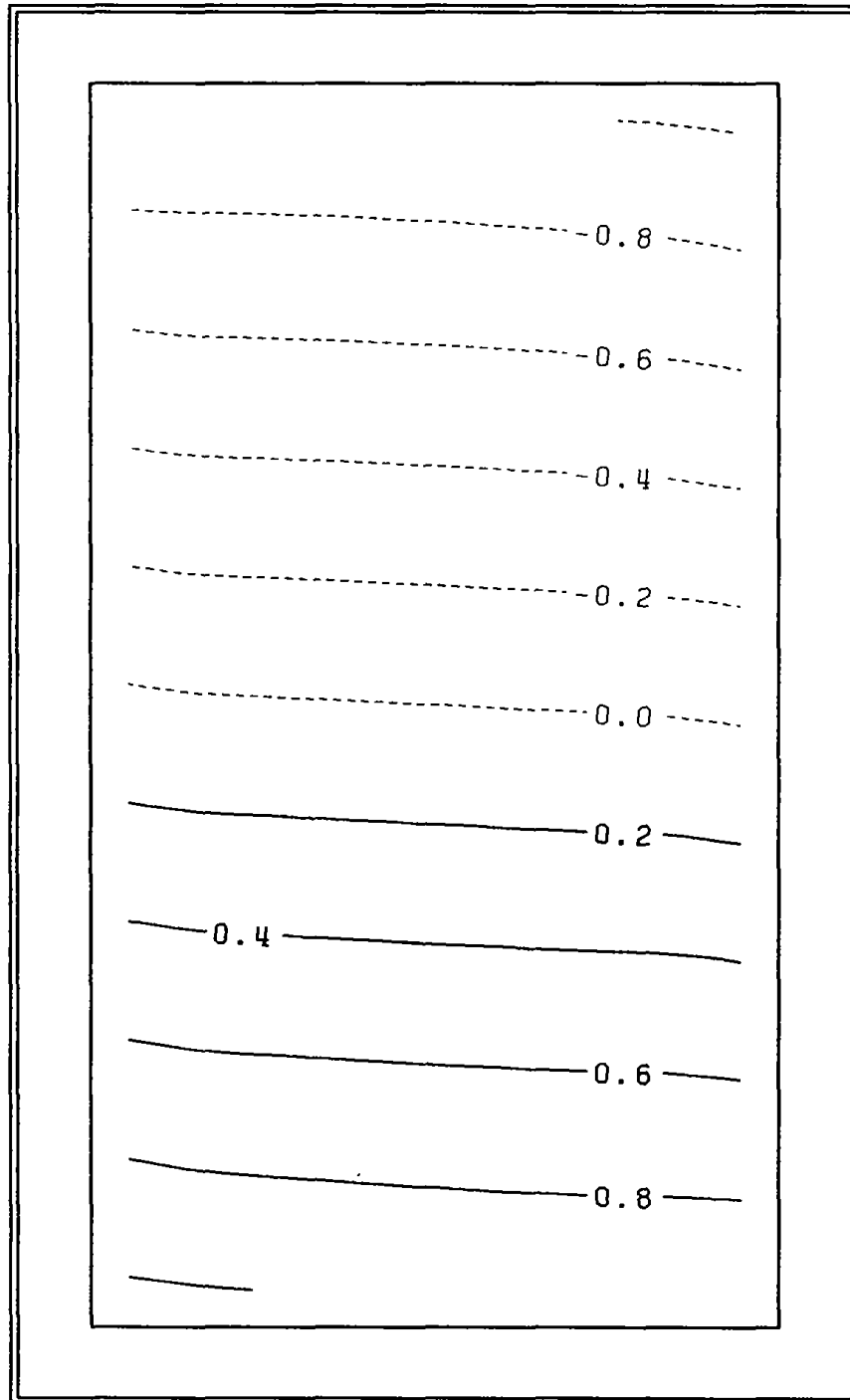
Fig. 4.11 층별 수평유속 분포





Fi.g 4.11 (계속)

ELEVATION CONTOUR (UNIT : M)



LOOP = 6000

Fig. 4.12 최종상태의 해수면

제 Ⅱ 편  
( Part Ⅱ )



# APPLICATION OF VARIOUS VERTICAL COORDINATE TRANSFORMATION TECHNIQUES TO THE FORMULATION OF A THREE DIMENSIONAL HYDRODYNAMIC SEA MODEL

Kwang-Soo LEE, Kyung-Tae JUNG and Jae-Kwi SO  
Coastal Engineering Laboratory, KORDI

## Abstract

A three dimensional hydrodynamic sea model is formulated in terms of sigma coordinates in the vertical. In order to give enhanced resolution, the high-shear region (close to the sea surface in wind-induced flow, or the bottom boundary layer in tidal flow) is resolved by transforming the equations onto a logarithmic or log-linear coordinate scale before applying the finite difference scheme. The properties of these vertical grid schemes are described in somewhat detail.

A series of idealized calculations is performed, and the results show that the steady state computed surface currents in various vertical grid schemes are in good agreement with the analytical solution. However, high resolution is required when eddy viscosity is low, although a coarser grid can be used for higher eddy viscosity values.

# 1. Introduction

The coastal ocean is a region receiving a great deal of attention due to an increasing utilization of its resources. The demands for increasing development have directed to investigate the basic mechanisms which govern the circulation over the continental shelf. A knowledge of the circulation is useful to the management of fisheries and of oil and gas resource development. Spills of oil and other material from offshore drilling and oil transport activities may occur and significantly affect the environment. Therefore, a detailed knowledge of the vertical variation of meteorologically induced currents has become increasingly important, particularly in the design of offshore structures (Gordon, 1982) and for the prediction of the movement of the pollutants.

Over the last 30 years meteorologically induced changes have been computed using vertically integrated two-dimensional numerical models. These applications range from determining changes in sea surface elevation (Davies and Flather, 1977 ; Proctor et al., 1983) to circulation in shelf sea areas (Furnes, 1980 ; Pingree and Griffiths, 1980). These models have also been used to compute storm surges in shallow seas. A recent comprehensive review of storm surge model is given by Heaps(1983). Since these model are vertically integrated from sea surface to sea bed, they give no information on current profiles and the bed stress is conventionally computed from the depth mean current. The deficiencies of determining bed stress from the depth mean current are apparent in near coastal wind-driven circulations, where the bottom current and depth mean current may be significantly different in both magnitude and direction from each other. Some information on current profiles can be extracted from these models using a convolution method (Forristall, 1974 ; Davies, 1988). However, as main memory on computers expanded and computing power rapidly increased over the last decade it became computationally practical to solve the full three-dimensional hydrodynamic equations describing currents in a sea region.

The vertical variation of wind-induced currents in an ocean was first investigated by Ekman(1905). His model was of a horizontally unbounded sea with infinite depth. Vertical eddy viscosity was constant and in the steady state the angle between surface current and wind direction was  $45^\circ$ . Ekman(1905) showed that the vertical variation of current profile, particularly in the near surface layer, is significantly influenced by the vertical transfer of momentum. In his case, this was parameterized by a constant coefficient of vertical eddy viscosity. Analytical calculations have usually parameterized the internal shear stress in terms of a coefficient of eddy viscosity. Also, these models have in general only considered a single point in the vertical. Such models clearly shows a very high shear boundary layer, which will have to be accurately resolved in any numerical solution.

The numerical solution of the three dimensional hydrodynamic equations which describe the motion of the sea, using either grid boxes or multiple layers in the vertical is now well established (e.g. Davies, 1985). For problems in which a boundary layer of high current shear occurs, such as the region near sea bed in tidal flows or near the sea surface in wind-driven flows, it is necessary to increase the resolution in this area. Enhanced resolution within the high shear region can be obtained by using a very fine grid spacing. However, increasing the grid resolution by this means involves a larger number of point values in the vertical, which have to be integrated through time as the solution evolves. Naturally, as the grid resolution is refined, the associated computer time required to integrate the equations increases rapidly.

In this paper, a single point model is formulated in terms of sigma coordinates in the vertical. In order to get the enhanced resolution in the high shear region maintaining the same number of grid spacing, the transformation onto a logarithmic or log-linear coordinate scale through the vertical is attempted. A series of idealized calculation is performed and the accuracy and computational efficiency of solutions using various finite difference grids in the vertical are compared. In section 2 the properties of these various vertical grid schemes are described in somewhat detail, and the accuracy and the rate of convergence of these schemes are examined in section 4.

## 2. Hydrodynamic Equations and Sigma Coordinate Transformation

### 2.1. Hydrodynamic Equations

For a single point model in the vertical, the governing linear hydrodynamic equations are given by

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left( N \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left( N \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (2)$$

in which

t	time
x, y	the horizontal coordinates in a Cartesian coordinates system
u, v	the x- and y-components of current at depth z
z	the depth below the undisturbed sea surface
f	the Coriolis parameter
P	the external pressure forcing
N	the coefficient of vertical eddy viscosity

In order to solve equations (1) and (2) for u and v, boundary conditions have to be specified at the sea surface and at the sea bed.

In the wind-induced flows, the surface conditions at z=0 are

$$-\rho \left( N \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0} = F_x \quad , \quad -\rho \left( N \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z=0} = F_y \quad (3)$$



where  $F_x$  and  $F_y$  denote the x and y-components of wind stress acting on the water surface;  $\rho$ , the density of sea water, is assumed constant. For the tidal or wind wave induced flows, a zero stress surface boundary condition is applied,

$$\left(N \frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0} = \left(N \frac{\partial v}{\partial z}\right)_{z=0} = 0 \quad (4)$$

The boundary conditions at the sea bed ( $z=h$ ) are

$$-\rho \left(N \frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=h} = \tau_x \quad , \quad -\rho \left(N \frac{\partial v}{\partial z}\right)_{z=h} = \tau_y \quad (5)$$

where  $\tau_x$  and  $\tau_y$  denotes the x- and y-components of bottom friction. Assuming a linear slip condition at the sea bed,

$$\tau_x = k\rho u_0 \quad , \quad \tau_y = k\rho v_0 \quad (6)$$

with k the coefficient of linear bottom friction. In these equations,  $u_0$  and  $v_0$  denote the x- and y-components of current at the sea bed. A quadratic law at the sea bed may be applied rather than the linear law,

$$\tau_x = K\rho u_0 (u_0^2 + v_0^2)^{1/2} \quad , \quad \tau_y = K\rho v_0 (u_0^2 + v_0^2)^{1/2} \quad (7)$$

with K the coefficient of non-linear bottom friction.

An alternative bottom boundary condition is a no-slip condition, namely :

$$u_0 = v_0 = 0 \quad (8)$$

For sinusoidal forcing due to tidal or wind wave induced flows at a point, the pressure gradients,  $\partial P / \partial x$  and  $\partial P / \partial y$ , can be expressed as

$$\frac{\partial P}{\partial x} = A_x \omega \cos(\omega t) \quad (9)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = A_y \omega \cos(\omega t) \quad (10)$$

in which  $A_x$  and  $A_y$  denote the amplitudes of the external forcing, and  $\omega$  its period.

## 2.2 Transformation to Sigma Coordinates

In general the water depth varies over a sea region. Therefore if the same number of grid spacing in the vertical, and hence the same vertical resolution, is to be maintained at each horizontal grid point, it is necessary to transform the vertical coordinate (Phillips, 1957 , Freeman et al. , 1975). Several algebraic transformations exist in the literature (Johns, 1978 ; Davies et al. , 1988 ; Davies and Johns, 1991) which can be used to transform equations (1) and (2) in such a manner, that the discretized form of the transformed equations on regular grids, is physically equivalent to using a grid with enhanced resolution in the near bed region. Appropriate transformations onto logarithmic or log-linear coordinate system with linear system are considered.

Linear Transformation :

$$\sigma = z/h \quad (11)$$

From equation (11), it can be readily shown that

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{\chi} \frac{\partial}{\partial \sigma} \quad (12)$$

with

$$\chi = h \quad (13)$$

In these equations  $h$  denotes water depth.

Logarithmic Transformation :

$$\sigma = \ln(z/z_0)/\alpha \quad (14)$$

with

$$\alpha = \ln(h/z_0) \quad (15)$$

In these equations  $z_0$  is the effective roughness height. From equations (14) and (15),

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{\chi} \frac{\partial}{\partial \sigma} \quad (16)$$

with

$$\chi = z_0 \alpha e^{\alpha \sigma} \quad (17)$$

Log-Linear Transformation :

$$\sigma = \frac{1}{\alpha} \left( \ln \frac{z}{z_0} + \frac{z-z_0}{z_*} \right) \quad (18)$$

with

$$\alpha = \ln \left( \frac{h}{z_0} \right) + \left( \frac{h-z_0}{z_*} \right) \quad (19)$$

in which  $z_*$  is a arbitrary height parameter which can be used to determine the height above the sea bed over which the grid is essentially logarithmic. From equation (18) and (19),

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{\chi} \frac{\partial}{\partial \sigma} \quad (20)$$

with

$$\chi = \frac{\alpha z z_*}{z+z_*} \quad (21)$$

Using the above sigma transformations, the interval  $z_0 \leq z \leq h$  ( $z_0=0$  in linear transformation) which varies with horizontal position is transformed into the constant interval  $0 \leq \sigma \leq 1$ . It may be readily shown that equations (12), (16) and (20) are all the same except  $\chi$  values which are different from each other. Substituting any of them into equations (1) and (2) gives the same transformed equations

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\chi} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{N}{\chi} \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right) \quad (22)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\chi} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{N}{\chi} \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right) \quad (23)$$

Transforming surface and bottom boundary conditions to sigma coordinates gives at the sea surface,

$$-\rho \left( \frac{N}{\chi} \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right)_{\sigma=0} = F_x, \quad -\rho \left( \frac{N}{\chi} \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right)_{\sigma=0} = F_y \quad (24)$$

and at the sea bed,

$$-\rho \left( \frac{N}{\chi} \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right)_{\sigma=1} = \tau_x, \quad -\rho \left( \frac{N}{\chi} \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right)_{\sigma=1} = \tau_y \quad (25)$$

### 3. Finite Difference Solution

The solution of equations (23) and (24) can be obtained using a Crank-Nicolson-like method in the time domain and staggered grid in the vertical.

At the k-th grid point,

$$\begin{aligned} \frac{u_k^{t+\Delta t} - u_k^t}{\Delta t} - f v_k^t = & \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right)^{t+\theta_1 \Delta t} + \frac{\theta_1 W_k}{\Delta \sigma^2} \left( N_k^t \bar{W}_k \delta u_k^{t+\Delta t} - N_{k-1}^t \bar{W}_{k-1} \delta u_{k-1}^{t+\Delta t} \right) \\ & + \frac{\theta_2 W_k}{\Delta \sigma^2} \left( N_k^t \bar{W}_k \delta u_k^t - N_{k-1}^t \bar{W}_{k-1} \delta u_{k-1}^t \right) \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{v_k^{t+\Delta t} - v_k^t}{\Delta t} + f u_k^t = & \left( \frac{\partial P}{\partial y} \right)^{t+\theta_1 \Delta t} + \frac{\theta_1 W_k}{\Delta \sigma^2} \left( N_k^t \bar{W}_k \delta v_k^{t+\Delta t} - N_{k-1}^t \bar{W}_{k-1} \delta v_{k-1}^{t+\Delta t} \right) \\ & + \frac{\theta_2 W_k}{\Delta \sigma^2} \left( N_k^t \bar{W}_k \delta v_k^t - N_{k-1}^t \bar{W}_{k-1} \delta v_{k-1}^t \right) \end{aligned} \quad (27)$$

in which  $\delta u_k = u_{k+1} - u_k$  and  $\Delta \sigma$  is the vertical grid spacing. Also  $W_k = 1/\chi$  evaluated at u grid point k and  $\bar{W}_k = 1/\chi$  evaluated at the midpoint between u grid points k+1 and k with  $\Delta t$  the time step. In these equations, the time-weighting term  $\theta_1$  lies in the range  $0 \leq \theta_1 \leq 1$ , with  $\theta_2 = 1 - \theta_1$ . In the Crank-Nicolson method, the solution is time centred with  $\theta_1 = 0.5$ .

In the explicit case ( $\theta_1 = 0$ ), a stability analysis based upon a grid resolution of order 0.005 m in the near bed region (necessary in order to adequately resolve the high-shear layer) required a time step of order 0.0025 seconds for a typical N of 0.01 m<sup>2</sup>/s - clearly impractical. In the case in which  $\theta_1$  is non-zero, an implicit solution ( $\theta_1=1.0$ ) or a semi-implicit solution ( $\theta_1=0.5$ ) is obtained, which on a regular grid can be shown to be unconditionally stable. The application of an implicit or a semi-implicit method, with the grid differencing given above,

leads to the solution of a set of simultaneous equations involving a tridiagonal matrix. Details of the form of the matrix equations and solution using the Thomas method are standard and can be found in Roache(1972).

Using fictitious current point,  $u_1$  ( $v_1$ ) and  $u_{m+1}$  ( $v_{m+1}$ ), surface and bottom boundary conditions, in the finite difference form are given by,

$$-\rho \bar{N}_m \frac{u_{m+1} - u_m}{\Delta \sigma} = \chi F_x \quad , \quad -\rho \bar{N}_m \frac{v_{m+1} - v_m}{\Delta \sigma} = \chi F_y \quad (28)$$

$$-\rho \bar{N}_1 \frac{u_2 - u_1}{\Delta \sigma} = \chi \tau_x \quad , \quad -\rho \bar{N}_1 \frac{v_2 - v_1}{\Delta \sigma} = \chi \tau_y \quad (29)$$

## 4. Numerical Calculation of Wind-Induced Currents

In order to check how the accuracy of the computed current, especially the surface current, depends upon vertical grid spacing and eddy viscosity, the Ekman(1905) problem of a uniform wind suddenly applied over an infinitely deep ocean of infinite extent is examined. Since this problem has an analytical solution, comparisons of accuracy for various vertical grid resolutions and eddy viscosity values can be made. It is known from the analytical solution that as the value of eddy viscosity is reduced, for a given wind stress, surface currents and shear in the surface boundary layer both increase. It is therefore instructive to consider how fine or coarse a grid is required in this region for various values of eddy viscosity. In Ekman's problem, a no-slip condition can be used at the sea bed, and if the depth is less than the Ekman depth,  $E_a$ , then this condition does significantly affect the current. If a slip condition is used, then the bottom stress is determined by the bottom current. Provided the ocean is sufficiently deep, comparably or greater than the Ekman depth then the bottom current is very small and bottom stress does not significantly affects the currents, which can be compared with Ekman's solution.

The water is initially at rest, and currents are generated by a uniform northerly wind of 20 m/s, suddenly applied at time  $t=0.0$ . Parameters used in the calculation are the Coriolis parameter,  $f = 8.363 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  (latitude  $35^\circ\text{N}$ ); water density,  $\rho_{\text{water}} = 1025 \text{ Kg/m}^3$ ; water depth,  $h = 250 \text{ m}$ ; and the coefficient of linear bottom friction,  $k = 0.002 \text{ m/s}$ . The surface shear stress due to wind,  $\tau_w$ , is given by

$$\tau_w = C_D \rho_a W^2 \quad (30)$$

with drag coefficient  $C_D = 2.5 \times 10^{-3}$ , the air density  $\rho_a = 1.25 \text{ Kg/m}^3$ , and the wind velocity  $W$  at a certain height (usually 10m) above sea surface. The corresponding wind shear stress,  $\tau_w = 1.25 \text{ N/m}^2$ . Since the ocean is of infinite extent and the wind field is infinite, no sea surface gradients develop. This would not be the

case if the wind field was of finite extent. Therefore, the computed current is a pure drift current.

To test the accuracy of computed currents in various vertical coordinate scales, a uniform grid spacing of  $\Delta\sigma=0.01$  (100 grids) was used throughout the computation. A time step  $\Delta t=10$  s was used to resolve the initial rapid change in current in response to the wind.

$u$  and  $v$  components of surface current at  $t=3.5$  hours, the approximate time when the  $v$  component of current in wind direction has reached a maximum, and at the time of a near steady state, for a range of eddy viscosity values are given in Table 1 (with a no-slip bottom boundary condition) and Table 2 (with a slip bottom boundary condition). The computed profiles of  $u$  and  $v$  components in various vertical coordinate scales for a constant eddy viscosity  $N=0.1$   $\text{m}^2/\text{s}$  with a no-slip condition are plotted in Fig. 1, with a slip condition in Fig. 2. And, the profiles for a constant eddy viscosity  $N=0.01$   $\text{m}^2/\text{s}$  with a no-slip condition are plotted in Fig. 3, with a slip condition in Fig. 4. The current profiles in these figures were plotted by using spline interpolation of vertical grid point values. It is evident from Tables 1 and 2, that as the value of eddy viscosity is reduced from  $0.4$   $\text{m}^2/\text{s}$  to  $0.001$   $\text{m}^2/\text{s}$ , the surface current at  $t=3.5$  hours and in the steady state increases. These figures show that as the eddy viscosity is decreased shear in the surface increases.

The sensitivity of current profiles and surface currents to changes of the values of  $z_0$  and  $z_*$  in logarithmic and log-linear coordinate scales was examined. Again the horizontally unbounded sea with a water depth of 250 m is considered. The constant eddy viscosity  $N=0.01$   $\text{m}^2/\text{s}$  is used, and for the other parameters the same values used in previous calculations are given. Computed surface current at  $t=3.5$  hours and at a near steady state are given in Table 3 (with a no-slip condition) and Table 4 (with a slip condition). Current profiles computed in the logarithmic coordinate with values of  $z_0 = 0.01$  m and 0.1 m are given in Fig. 5. Current profiles computed in the log-linear coordinate with values of  $z_0 = 0.01$  and 0.1 m but maintaining  $z_* = 25$  m are shown in Fig. 6, and with values of  $z_* = 50$  m, 10 m and 1 m but maintaining  $z_0 = 0.001$  m in Fig. 7.



Time hodographs of u and v components of surface currents for a constant eddy viscosity  $N=0.2\text{m}^2/\text{s}$  computed in various vertical grid schemes are shown in Fig. 8 (with a no-slip condition) and Fig. 9 (with a slip condition). It is evident from these figures that within the first few hours following the onset of wind, surface current flows essentially in the direction of the wind stress. The effect of the earth's rotation in producing inertial oscillations having a period  $T = 2\pi/f \approx 20.9$  hours (approximately 75000 seconds) can also be seen in these figures. Initially the inertial oscillations in the surface layer are heavily damped, as can be seen by the initial rapidly spiralling decay over the first couple of inertial periods, although subsequently this decay decreases. This is because wind energy is initially transmitted to the surface layer of the water, although as time progresses this momentum diffuses from this layer to greater depths is limited by rotational effects and a stage is reached where the wind's energy can no longer penetrate to greater depth. When this occurs the heavy damping in the surface layer decreases, although damping continues due to frictional effects. In a shallower region, where wind energy can penetrate to the sea bed, bottom friction will contribute to this damping.

## 5. Concluding Remarks

A single point sigma coordinate model has been developed in this paper. Vertical grid spacing in this model can be refined in high shear layers, such as those which occur in the near-surface layer during major wind events, by means of the transformation onto logarithmic or log-linear scale of coordinate in the vertical. Time integration has been accomplished using the Crank-Nicolson method which ensures unconditional stability without reducing the time step when a very high vertical grid resolution is required.

A series of idealized calculations have been performed to examine how fine a grid spacing is required accurately to resolve the high shear surface layers. Results show that high resolution is required when surface eddy viscosity is low, although a coarser grid can be used for higher eddy viscosity values.

### Acknowledgements

The work described in this paper was funded by the Korea Ocean Research and Development Institute under the basic research grant No. PE00270.

## References

- Davies, A.G., R.L. Soulsby and H.L. King. 1988. A numerical model of the combined wave and current bottom boundary layer. *Jou. of Geophysical Research*. Vol.93. 491-508.
- Davies, A.M. 1985. Application of a sigma coordinate sea model to the calculation of wind-induced currents. *Continental Shelf Research*. Vol.4. 389-423.
- Davies, A.M. 1988. On formulating two-dimensional vertically integrated hydrodynamic numerical models with an enhanced representation of bed stress. *Jou. of Geophysical Research*. Vol.93. 1241-1263.
- Davies, A.M. and R.A. Flather. 1977. Computation of the storm surge of 1 to 6 April 1973 using numerical models of the Northwest European Continental Shelf and North Sea. *Deutsche Hydrographische Zeitschrift*. Vol.30. 139-162.
- Davies, A.M. and J.E. Johns. 1991. On the numerical solution of the turbulence energy equations for wave and tidal flows. *Int. Jou. for Numerical Methods in Fluids*. Vol.12. 17-41.
- Ekman, V.W. 1905. On the influence of the earth's rotation on ocean-currents. *Arkiv Math. Astr. Ocean Phys*. Vol.2. No.11.
- Forristall, G.Z. 1974. Three-dimensional structure of storm-generated currents. *Jou. of Geophysical Research*. Vol.79. 2721-2729.
- Freeman, N.G., A.M. Hale and M.B. Danard. 1972. A modified sigma equation approach to the numerical modelling of great lake hydrodynamics. *Jou. of Geophysical Research*. Vol.77. 1050-1060.
- Furnes, G.K. 1980. Wind effects in the North Sea. *Jou. of Physical Oceanography*. Vol.10. 978-984.

- Gorden, R.L. 1982. Coastal ocean current response to storm wind. *Jou. of Geophysical Research*. Vol.87. 1939-1951.
- Heaps, N.S. 1983. Storm surges, 1967-1982. *Geophys. Jou. R. Astron. Soc.* Vol.64. 291-302.
- Johns, B. 1978. The modelling of tidal flow in a channel using a turbulence energy closure scheme. *Jou. of Physical Oceanography*. Vol.8. 1042-1049.
- Phillips, N.A. 1957. A coordinate system having some special advantages for numerical forecasting. *Jou. of Meteorology*. Vol.14. 184-186.
- Pingree R.D. and D.K. Griffiths. 1980. Currents driven by a steady uniform wind stress on the shelf seas around the British Isles. *Oceanologica Acta*. Vol.3. 227-236.
- Proctor, R., H.H. Peeck and C. Brockman. 1983. Operational storm surge models for the North Sea. *Continental Shelf Research*. Vol.2. 317-329.
- Roache, J.P. 1972. *Computational Fluid Dynamics*. Hermosa Publishers, Albuquerque, New Mexico.

### Captions of Tables

1. Computed surface currents for a range of eddy viscosity values with a no-slip condition in various vertical grid schemes.
2. Computed surface currents for a range of eddy viscosity values with a slip condition in various vertical grid schemes.
3. Computed surface currents using a no-slip condition in logarithmic and log-linear vertical coordinates with various  $z_0$  and  $z_*$  values.
4. Computed surface currents using a slip condition in logarithmic and log-linear vertical coordinates with various  $z_0$  and  $z_*$  values.

### Captions of Figures

1. Profiles of  $u$  and  $v$  in a water depth  $h=250\text{m}$  at time  $t=3.5\text{hours}$  and  $t=240\text{hours}$  computed for a constant eddy viscosity  $N=0.01\text{ m}^2/\text{s}$  with no-slip condition in various vertical grid schemes. (a) linear. (b) logarithmic ( $z_0=0.001\text{m}$ ). (c) log-linear ( $z_0=0.001\text{m}$ ,  $z_* = 25\text{m}$ ).
2. Profiles of  $u$  and  $v$  in a water depth  $h=250\text{m}$  at time  $t=3.5\text{hours}$  and  $t=240\text{hours}$  computed for a constant eddy viscosity  $N=0.01\text{ m}^2/\text{s}$  with slip condition in various vertical grid schemes. (a) linear. (b) logarithmic ( $z_0=0.001\text{m}$ ). (c) log-linear ( $z_0=0.001\text{m}$ ,  $z_* = 25\text{m}$ ).
3. Profiles of  $u$  and  $v$  in a water depth  $h=250\text{m}$  at time  $t=3.5\text{hours}$  and  $t=240\text{hours}$  computed for a constant eddy viscosity  $N=0.001\text{ m}^2/\text{s}$  with no-slip condition in various vertical grid schemes. (a) linear. (b) logarithmic ( $z_0=0.001\text{m}$ ). (c) log-linear ( $z_0=0.001\text{m}$ ,  $z_* = 25\text{m}$ ).
4. Profiles of  $u$  and  $v$  in a water depth  $h=250\text{m}$  at time  $t=3.5\text{hours}$  and  $t=240\text{hours}$  computed for a constant eddy viscosity  $N=0.001\text{ m}^2/\text{s}$  with slip condition in various vertical grid schemes. (a) linear. (b) logarithmic ( $z_0=0.001\text{m}$ ). (c) log-linear ( $z_0=0.001\text{m}$ ,  $z_* = 25\text{m}$ ).
5. Profiles of  $u$  and  $v$  in a water depth  $h=250\text{m}$  at time  $t=3.5\text{hours}$  and  $t=240\text{hours}$  computed for a constant eddy viscosity  $N=0.01\text{ m}^2/\text{s}$  in the logarithmic transformed coordinate. (a)  $z_0=0.01\text{m}$  with no-slip condition. (b)  $z_0=0.1\text{m}$  with no-slip condition. (c)  $z_0=0.01\text{m}$  with slip condition. (d)  $z_0=0.1\text{m}$  with slip condition.
6. Profiles of  $u$  and  $v$  in a water depth  $h=250\text{m}$  at time  $t=3.5\text{hours}$  and  $t=240\text{hours}$  computed for a constant eddy viscosity  $N=0.01\text{ m}^2/\text{s}$  in the log-linear transformed coordinate with a values of  $z_* = 25\text{m}$ . (a)  $z_0=0.01\text{m}$  with no-slip condition. (b)  $z_0=0.1\text{m}$  with no-slip condition. (c)  $z_0=0.01\text{m}$  with slip condition. (d)  $z_0=0.1\text{m}$  with slip condition.

7. Profiles of  $u$  and  $v$  in a water depth  $h=250\text{m}$  at time  $t=3.5\text{hours}$  and  $t=240\text{hours}$  computed for a constant eddy viscosity  $N=0.01\text{ m}^2/\text{s}$  in the log-linear transformed coordinate with a values of  $z_0=0.001\text{m}$ . (a)  $z_* = 50\text{m}$  with no-slip condition. (b)  $z_* = 10\text{m}$  with no-slip condition. (c)  $z_* = 1\text{m}$  with no-slip condition. (b)  $z_0=0.1\text{m}$  with slip condition. (d)  $z_* = 50\text{m}$  with slip condition. (e)  $z_* = 10\text{m}$  with slip condition. (f)  $z_* = 1\text{m}$  with slip condition.
8. Hodographs, with dots denoting every 5000 seconds (approximately 1.4 hours) values, of  $u$  and  $v$  components of computed surface currents in a water of  $h=250\text{m}$  for a constant eddy viscosity  $N=0.2\text{ m}^2/\text{s}$  with no-slip condition in various vertical grid scheme. (a) linear. (b) logarithmic. (c) log-linear.
8. Hodographs, with dots denoting every 5000 seconds (approximately 1.4 hours) values, of  $u$  and  $v$  components of computed surface currents in a water of  $h=250\text{m}$  for a constant eddy viscosity  $N=0.2\text{ m}^2/\text{s}$  with slip condition in various vertical grid scheme. (a) linear. (b) logarithmic. (c) log-linear.

Table 1.

Vertical Grid scale	Eddy Viscosity (cm <sup>2</sup> /s)	Surface Current t=3.5 hours U(cm/s) V(cm/s)	Surface Current near steady state U(cm/s) V(cm/s)	Steady State Analytical Solution U(cm/s) V(cm/s)
Linear	4000	-7.9 -21.9	-15.0 -14.7	-14.9 -14.9
Logarithmic		-8.4 -22.7	-16.0 -14.5	
Log-Linear		-7.9 -21.8	-14.9 -14.7	
Linear	2000	-11.2 -30.9	-21.0 -21.1	-21.1 -21.1
Logarithmic		-11.6 -31.4	-21.9 -21.1	
Log-Linear		-11.3 -31.1	-21.2 -21.1	
Linear	1000	-15.8 -43.7	-29.8 -29.8	-29.8 -29.8
Logarithmic		-16.3 -44.5	-30.7 -29.8	
Log-Linear		-16.0 -44.0	-30.1 -29.8	
Linear	500	-22.3 -61.9	-42.1 -42.2	-42.2 -42.2
Logarithmic		-21.8 -60.9	-41.1 -42.2	
Log-Linear		-22.4 -61.9	-42.3 -42.2	
Linear	100	-49.6 -138.8	-93.7 -94.9	-94.3 -94.3
Logarithmic		-49.7 -137.5	-93.5 -94.2	
Log-Linear		-50.1 -138.2	-94.4 -94.2	
Linear	10	-143.8 -455.4	-279.3 -318.1	-298.2 -298.2
Logarithmic		-157.9 -436.3	-297.3 -298.0	
Log-Linear		-158.2 -436.9	-298.0 -298.0	



Table 2.

Vertical Grid scale	Eddy Viscosity (cm <sup>2</sup> /s)	Surface Current t=3.5 hours U(cm/s) V(cm/s)	Surface Current near steady state U(cm/s) V(cm/s)	Steady State Analytical Solution U(cm/s) V(cm/s)
Linear	4000	-7.9 -21.9	-14.8 -15.2	-14.9 -14.9
Logarithmic		-7.4 -20.8	-13.7 -14.9	
Log-Linear		-8.0 -22.0	-15.0 -15.2	
Linear	2000	-11.2 -30.9	-21.1 -21.1	-21.1 -21.1
Logarithmic		-10.5 -29.6	-19.8 -21.0	
Log-Linear		-11.1 -30.8	-21.0 -21.1	
Linear	1000	-15.8 -43.7	-29.8 -29.8	-29.8 -29.8
Logarithmic		-15.6 -43.3	-29.4 -29.4	
Log-Linear		-15.9 -43.8	-29.9 -29.9	
Linear	500	-22.3 -61.8	-42.1 -42.2	-42.2 -42.2
Logarithmic		-22.9 -62.6	-43.1 -42.2	
Log-Linear		-22.3 -61.8	-42.1 -42.2	
Linear	100	-49.6 -138.8	-93.7 -94.9	-94.3 -94.3
Logarithmic		-50.1 -138.3	-94.4 -94.2	
Log-Linear		-50.2 -138.4	-94.6 -94.2	
Linear	10	-143.8 -455.4	-279.3 -318.1	-298.2 -298.2
Logarithmic		-157.5 -435.6	-296.5 -298.0	
Log-Linear		-158.2 -436.9	-298.0 -298.0	

Table 3.

Vertical Grid Scale	Grid Scale Parameters	Surface Current t=3.5 hours U(cm/s) V(cm/s)	Surface Current near steady state U(cm/s) V(cm/s)
Linear		-49.6 -138.8	-93.7 -94.9
Logarithmic	$z_0=0.001m$	-50.1 -138.3	-94.4 -94.2
	$z_0=0.01m$	-50.0 -138.1	-94.2 -94.2
	$z_0=0.1m$	-50.1 -138.2	-94.3 -94.2
Log-Linear	$z_0=0.001m, z_* = 25m$	-50.2 -138.4	-94.6 -94.2
	$z_0=0.01m, z_* = 25m$	-50.0 -138.2	-94.2 -94.2
	$z_0=0.1m, z_* = 25m$	-50.1 -138.2	-94.3 -94.2
	$z_0=0.001m, z_* = 50m$	-50.2 -138.3	-94.5 -94.2
	$z_0=0.001m, z_* = 10m$	-50.1 -138.2	-94.3 -94.2
	$z_0=0.001m, z_* = 1m$	-50.1 -138.1	-94.3 -94.2

Table 4.

Vertical Grid Scale	Grid Scale Parameters	Surface Current t=3.5 hours U(cm/s) V(cm/s)	Surface Current near steady state U(cm/s) V(cm/s)
Linear		-49.6 -138.8	-93.7 -94.9
Logarithmic	$z_0=0.001m$	-49.7 -137.5	-93.5 -94.2
	$z_0=0.01m$	-50.0 -138.1	-94.2 -94.2
	$z_0=0.1m$	-50.1 -138.2	-94.3 -94.2
Log-Linear	$z_0=0.001m, z_* = 25m$	-50.1 -138.2	-94.4 -94.2
	$z_0=0.01m, z_* = 25m$	-50.1 -138.2	-94.3 -94.2
	$z_0=0.1m, z_* = 25m$	-50.1 -138.2	-94.3 -94.2
	$z_0=0.001m, z_* = 50m$	-50.2 -138.3	-94.5 -94.2
	$z_0=0.001m, z_* = 10m$	-50.1 -138.2	-94.3 -94.2
	$z_0=0.001m, z_* = 1m$	-50.1 -138.1	-94.3 -94.2

— T = 3.5 HOURS

— T = 240.0 HOURS

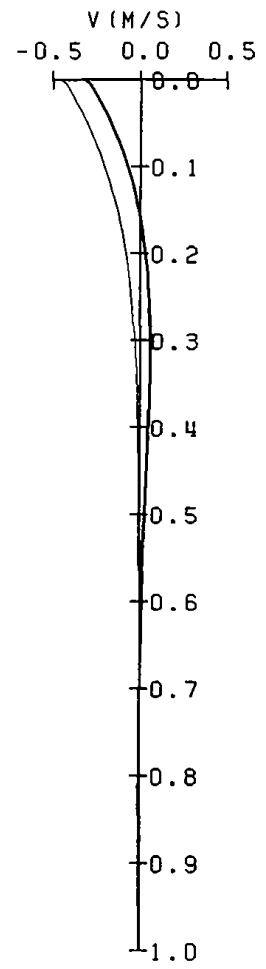
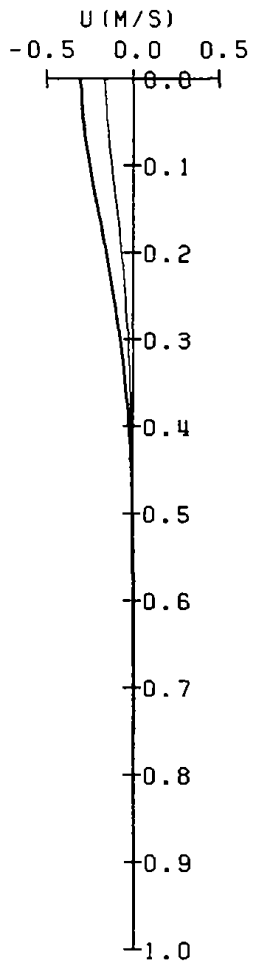


Fig. 1(a).

T = 3.5 HOURS

T = 240.0 HOURS

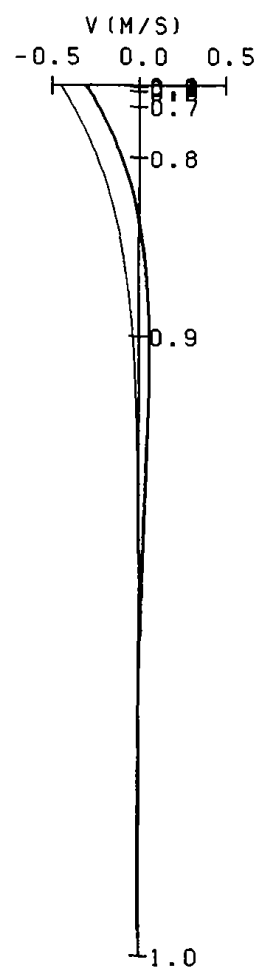
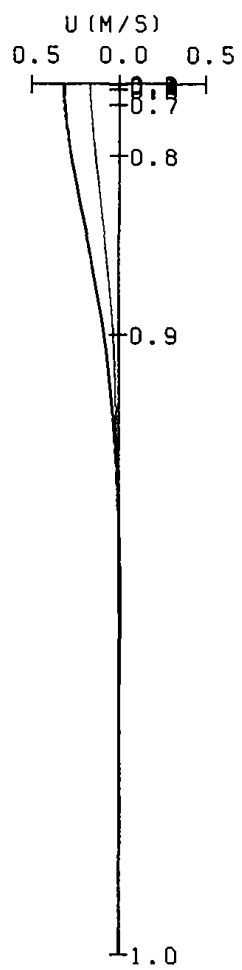


Fig. 1(b).

T = 3.5 HOURS

T = 240.0 HOURS

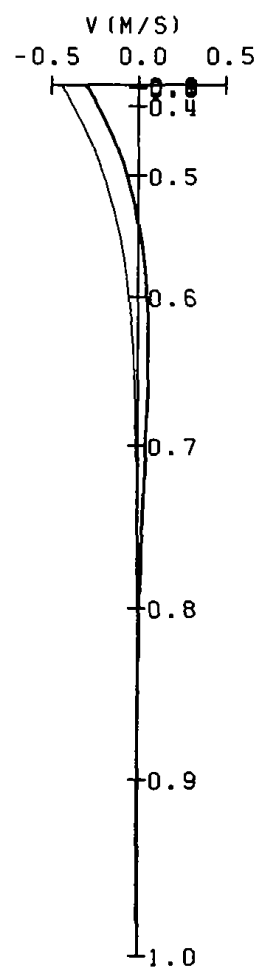
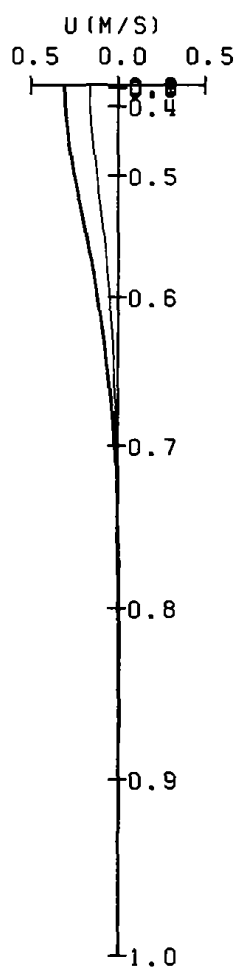


Fig. 1(c).

T = 3.5 HOURS

T = 240.0 HOURS

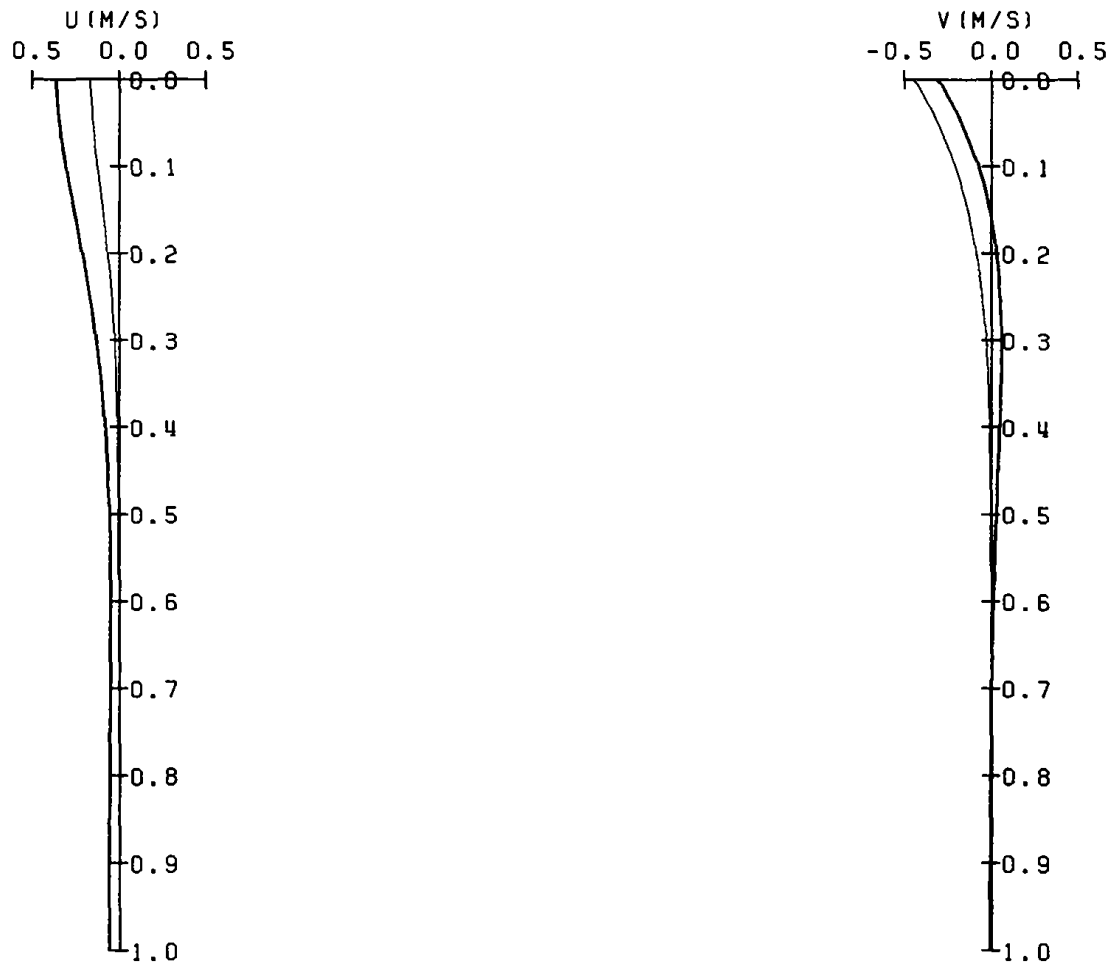


Fig. 2(a).

T = 3.5 HOURS

T = 240.0 HOURS

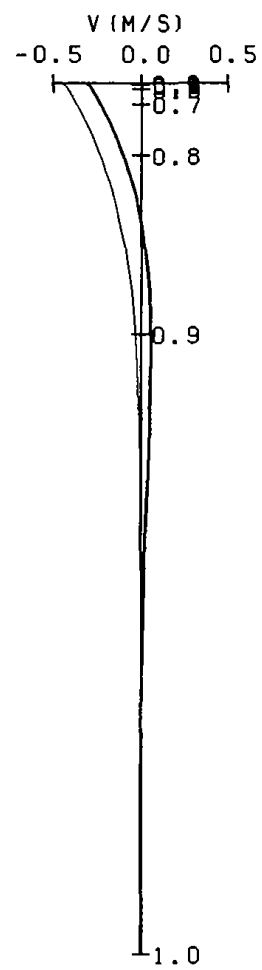
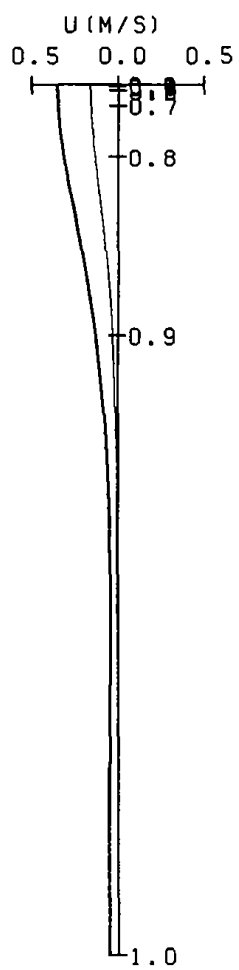


Fig. 2(b).



T = 3.5 HOURS

T = 240.0 HOURS

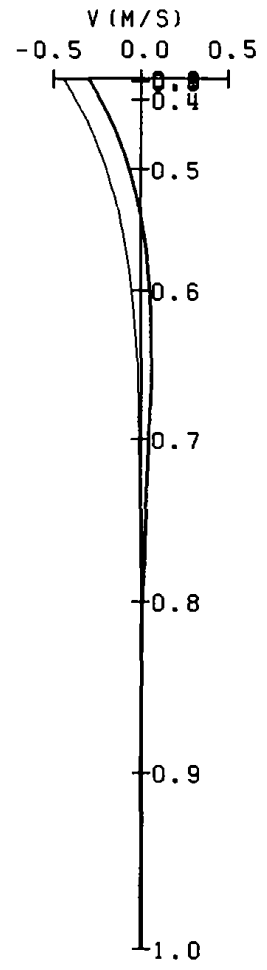
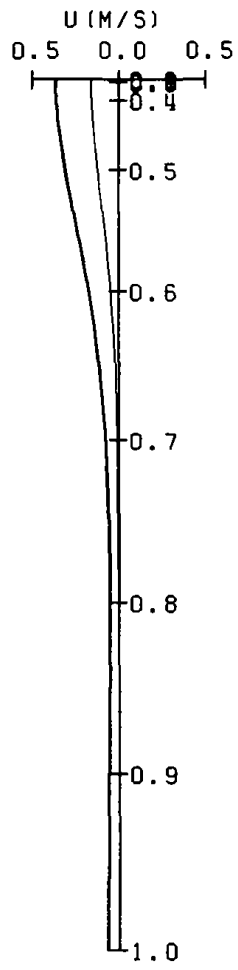


Fig. 2(c).

~~T = 3.5 HOURS~~ T = 240.0 HOURS

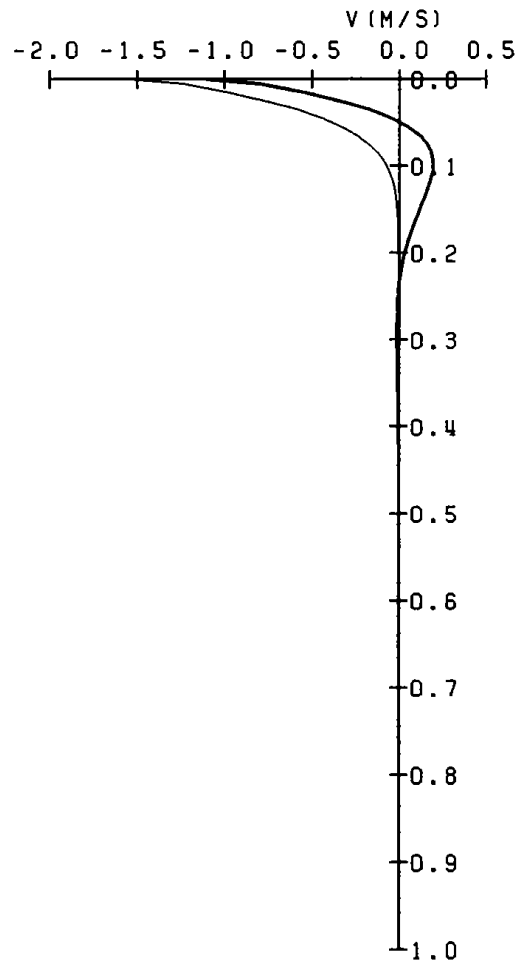
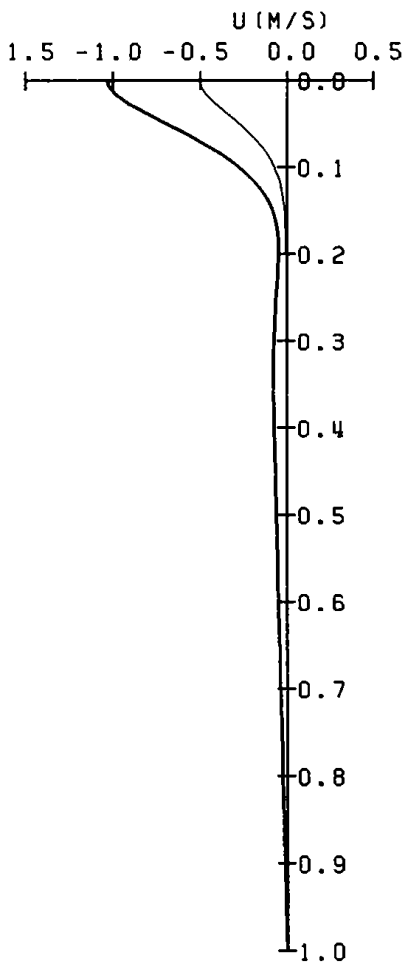


Fig. 3(a).

~~T = 3.5 HOURS~~ T = 240.0 HOURS

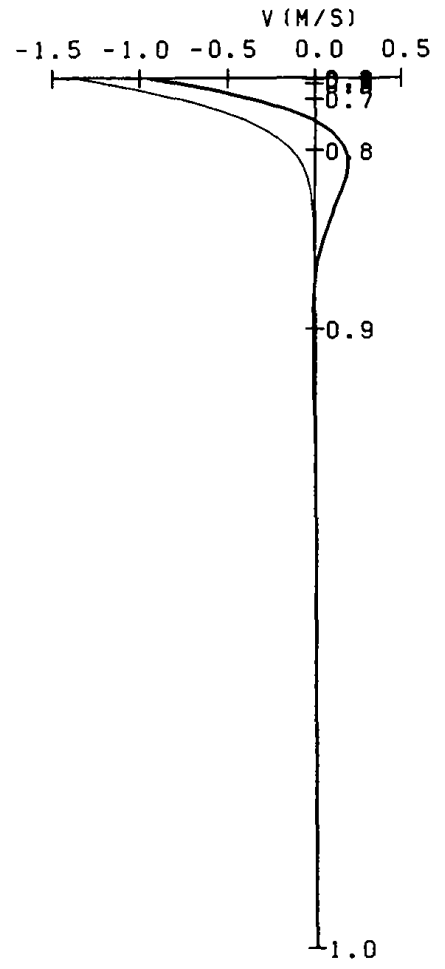
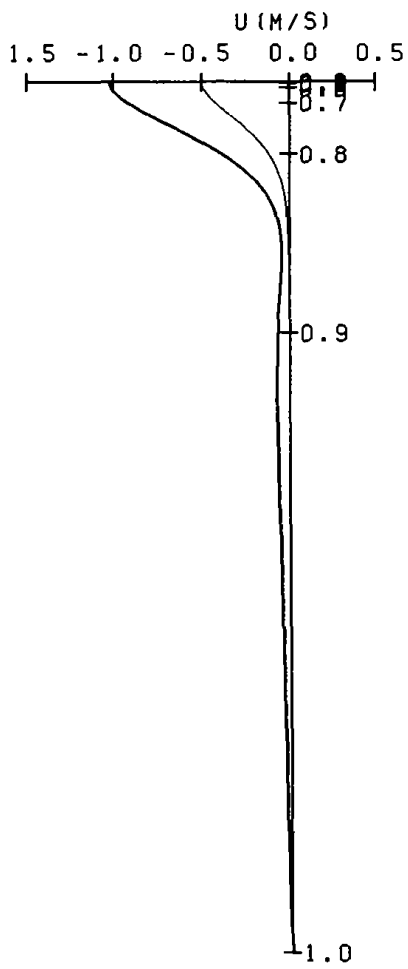


Fig. 3(b).

— T = 3.5 HOURS      — T = 240.0 HOURS

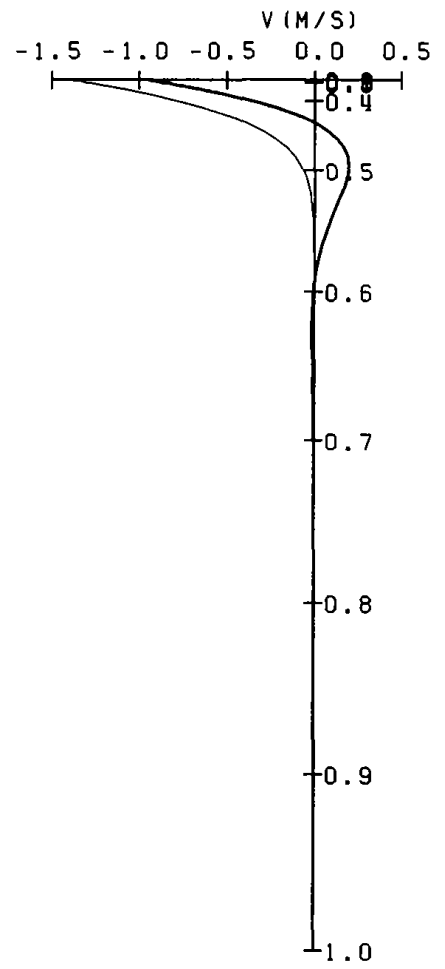
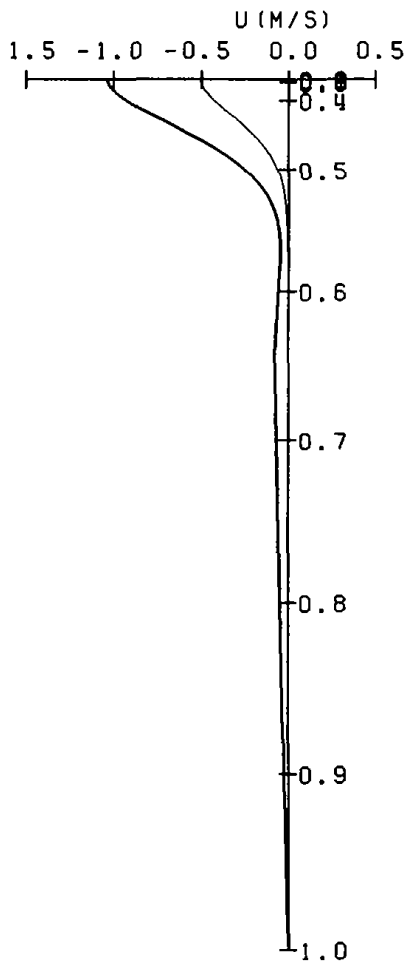


Fig. 3(c).

— T = 3.5 HOURS — T = 240.0 HOURS

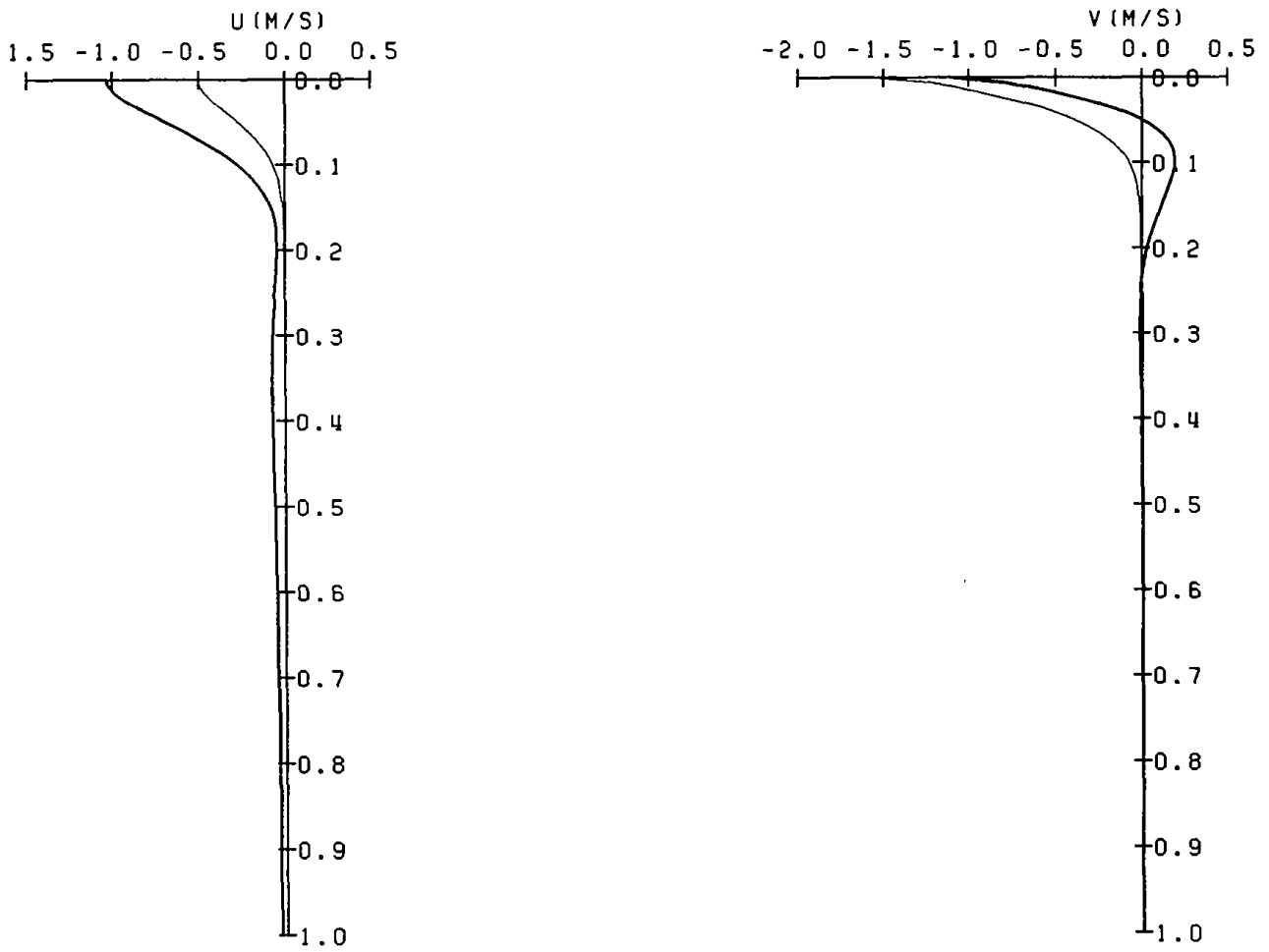


Fig. 4(a).

— T = 3.5 HOURS      — T = 240.0 HOURS

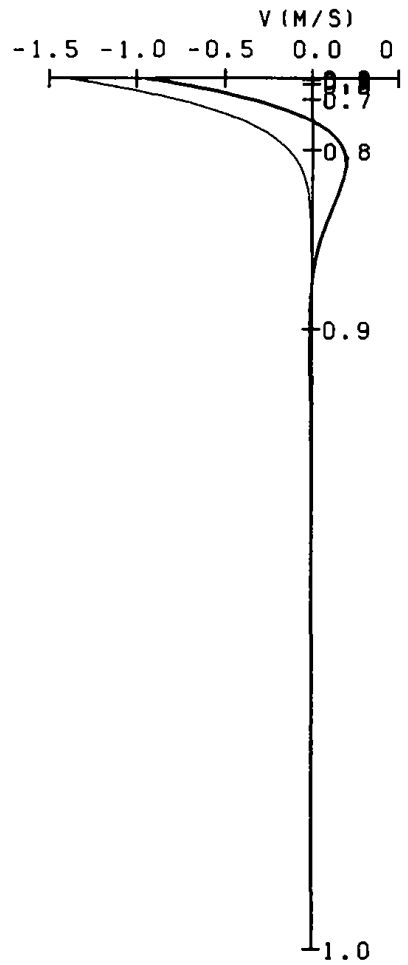
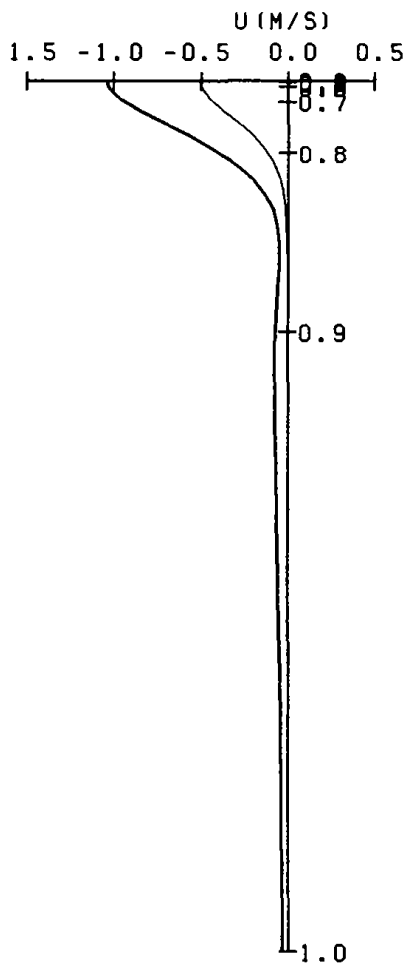


Fig. 4(b).

— T = 3.5 HOURS      — T = 240.0 HOURS

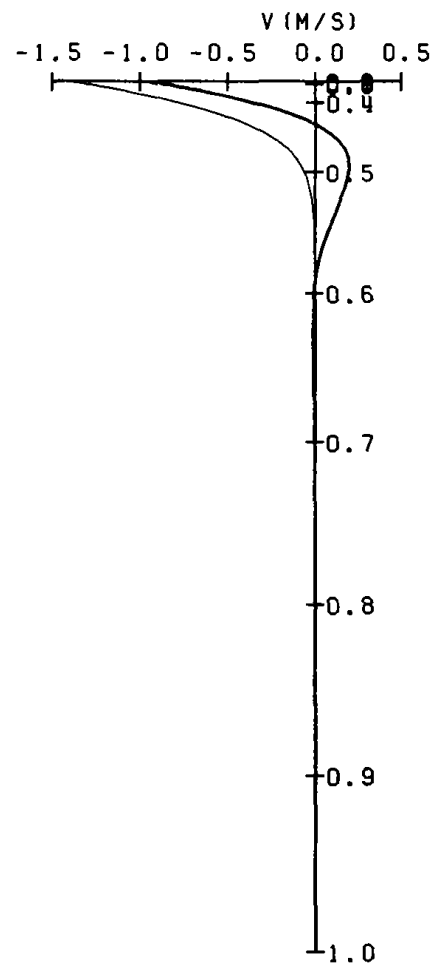
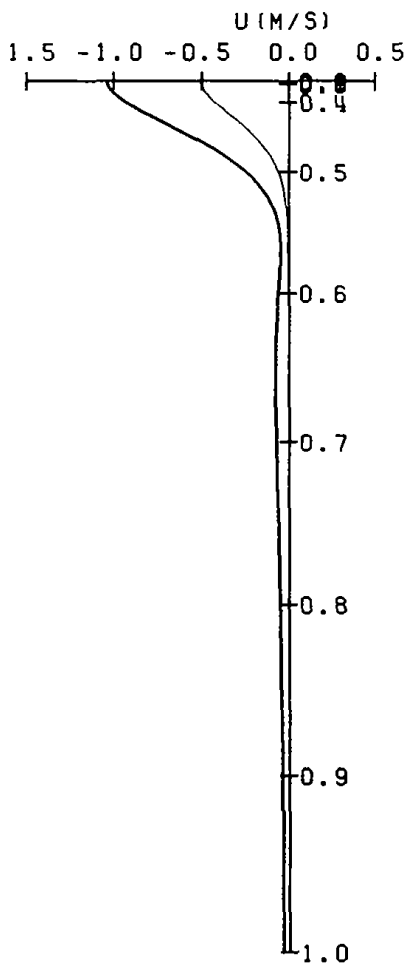


Fig. 4(c).

— T = 3.5 HOURS      — T = 240.0 HOURS

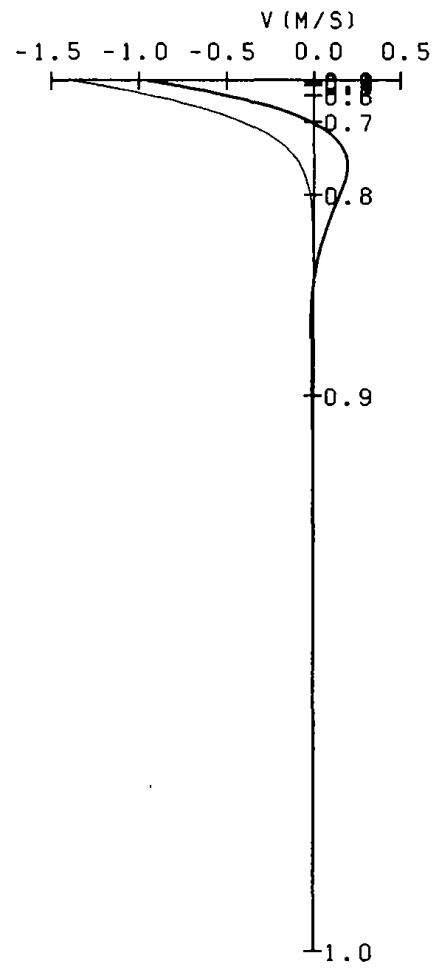
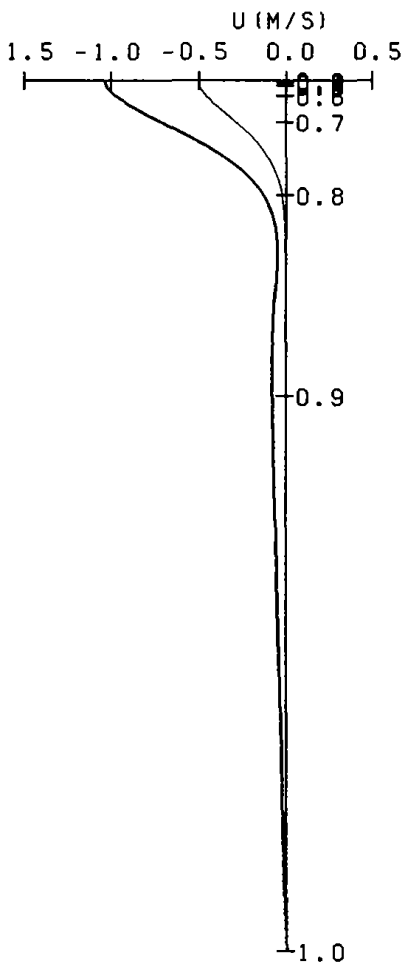


Fig. 5(a).



— T = 3.5 HOURS      — T = 240.0 HOURS

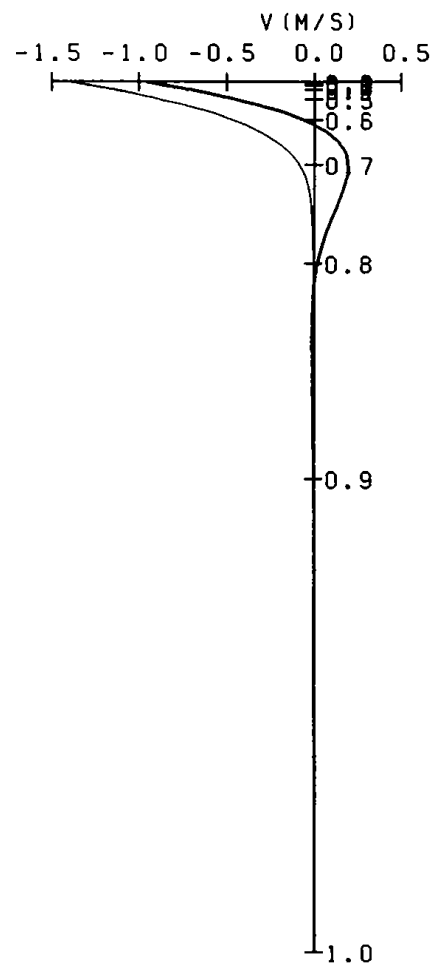
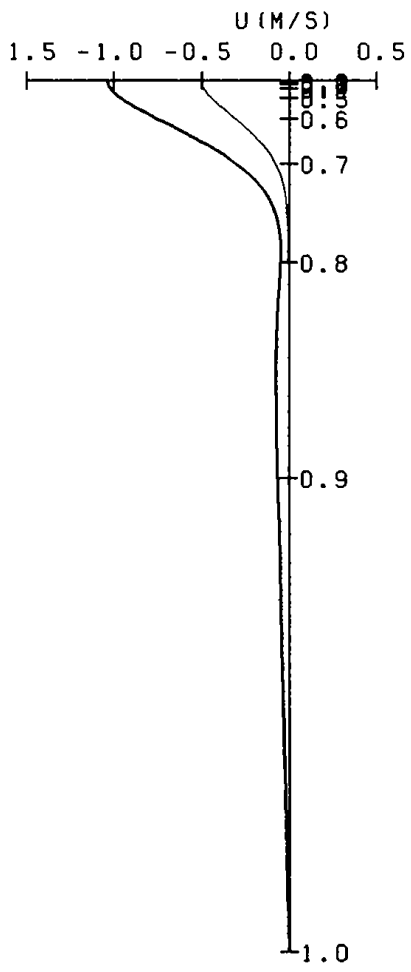


Fig. 5(b).

— T = 3.5 HOURS      — T = 240.0 HOURS

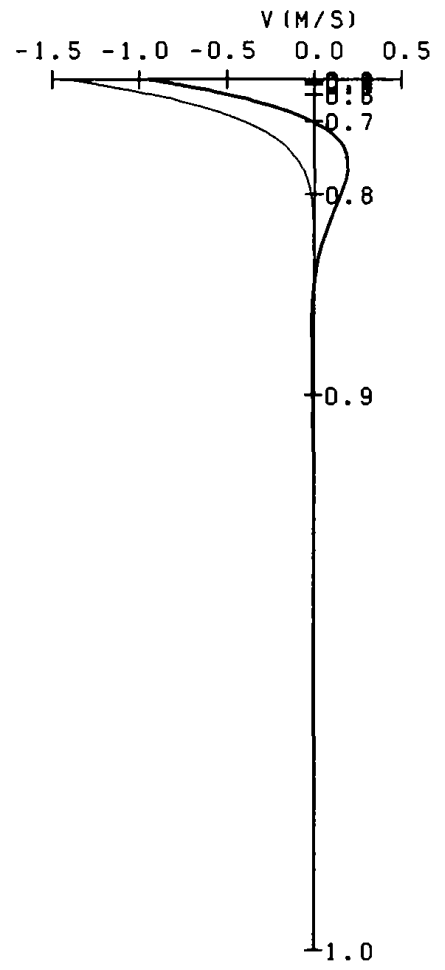
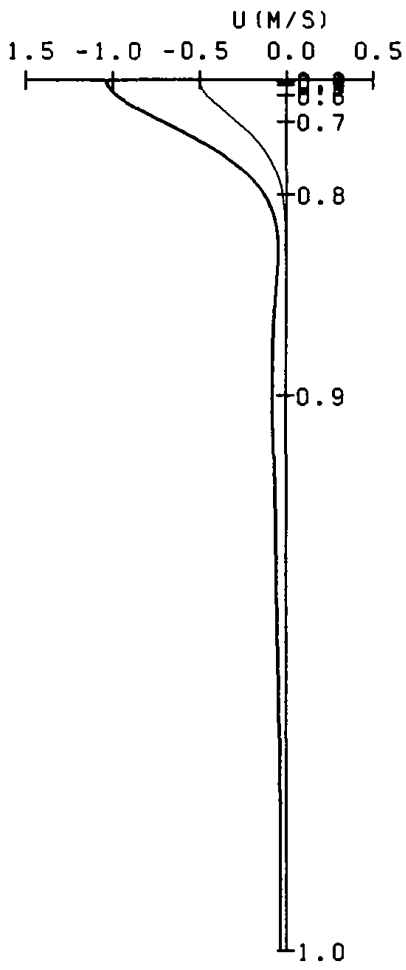


Fig. 5(c).

— T = 3.5 HOURS      — T = 240.0 HOURS

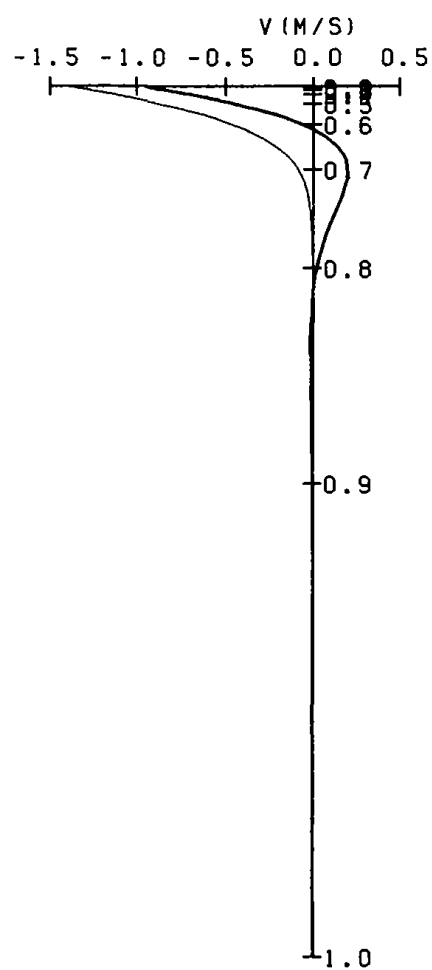
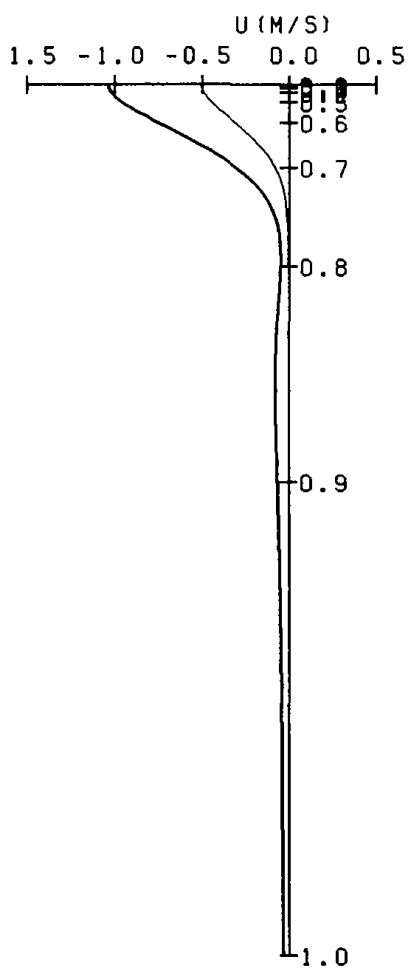


Fig. 5(d).

— T = 3.5 HOURS      — T = 240.0 HOURS

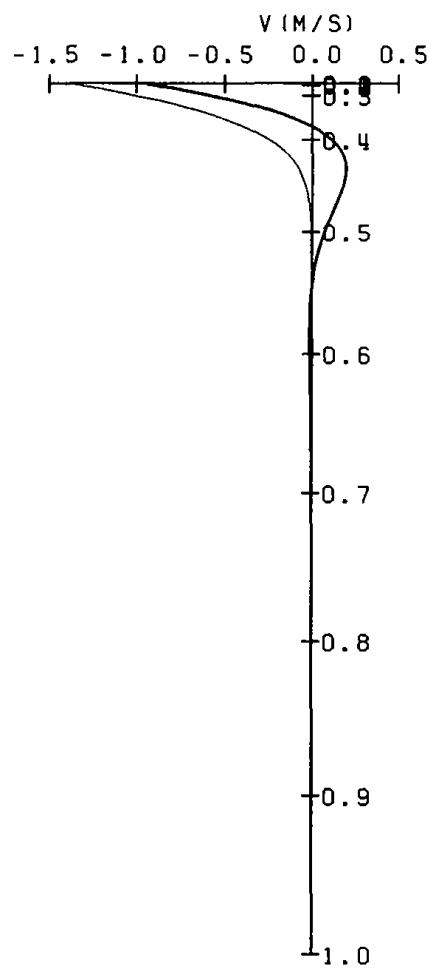
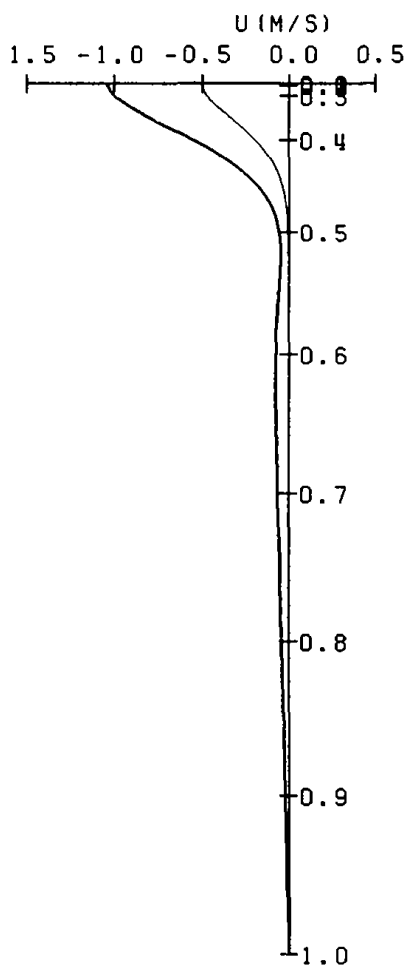


Fig. 6(a).

— T = 3.5 HOURS      — T = 240.0 HOURS

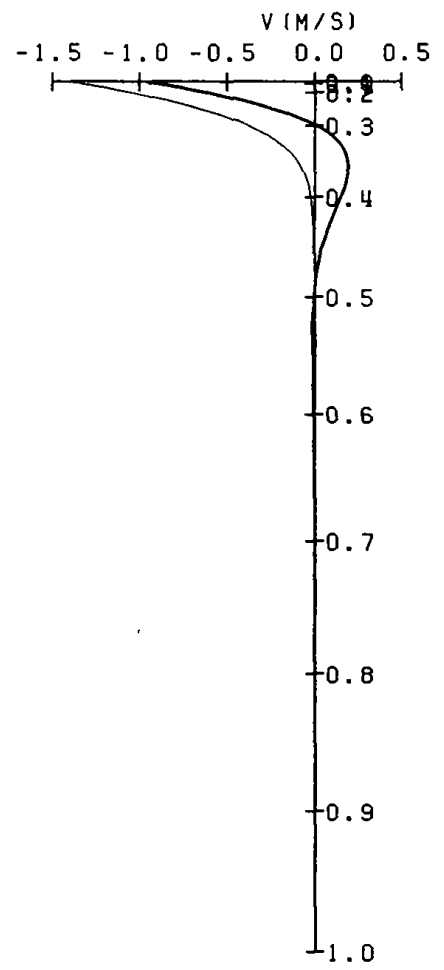
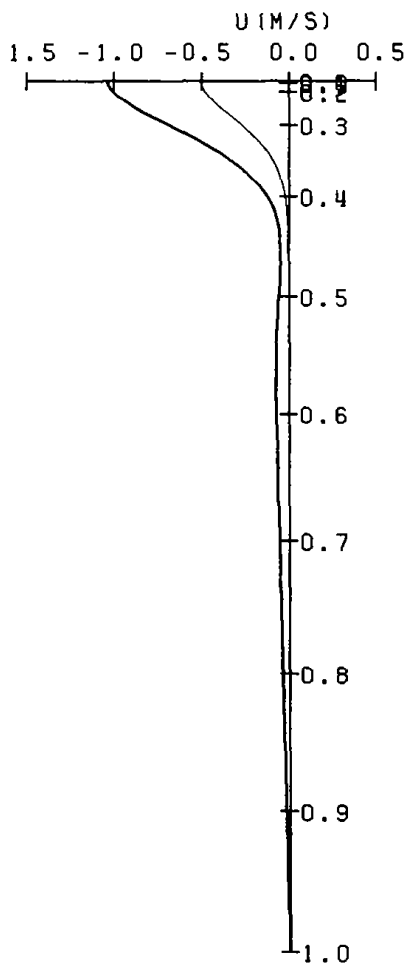


Fig. 6(b).

— T = 3.5 HOURS      — T = 240.0 HOURS

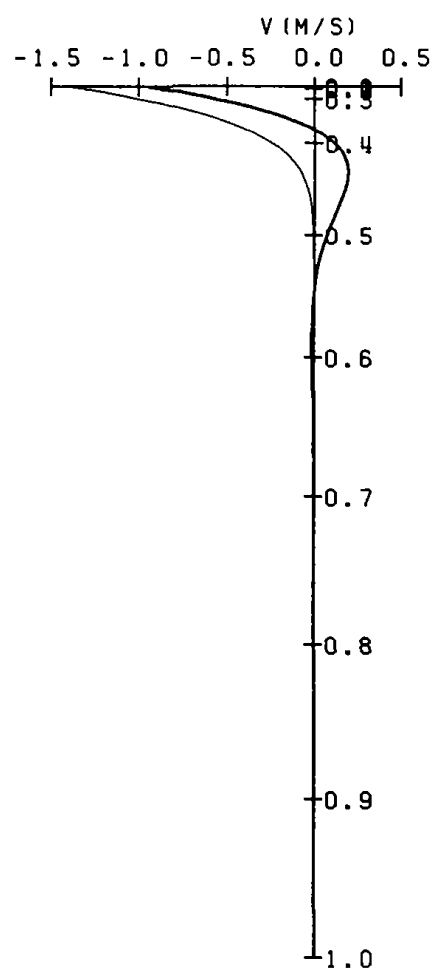
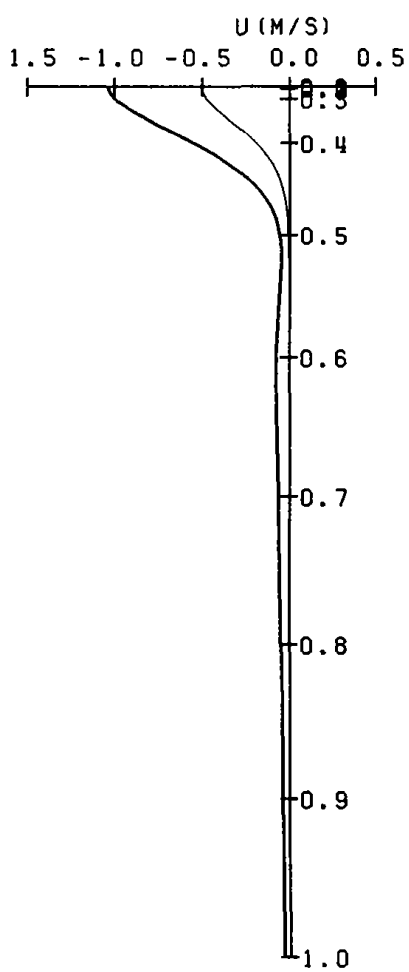


Fig. 6(c).

— T = 3.5 HOURS      — T = 240.0 HOURS

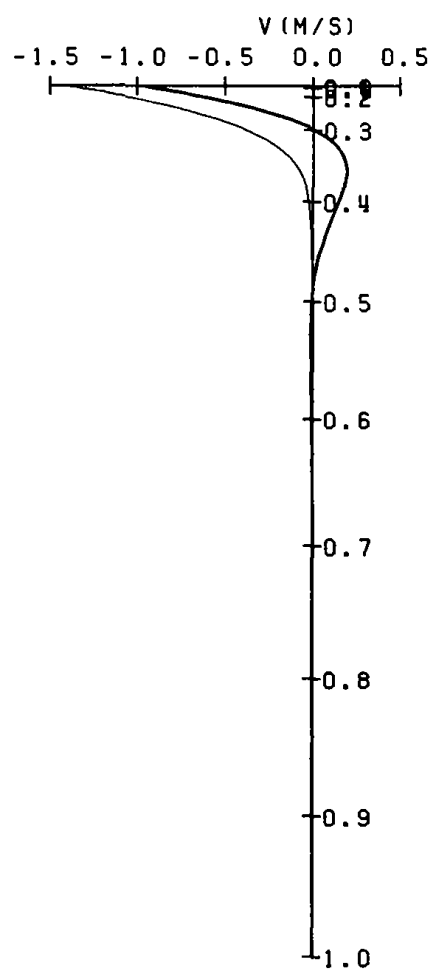
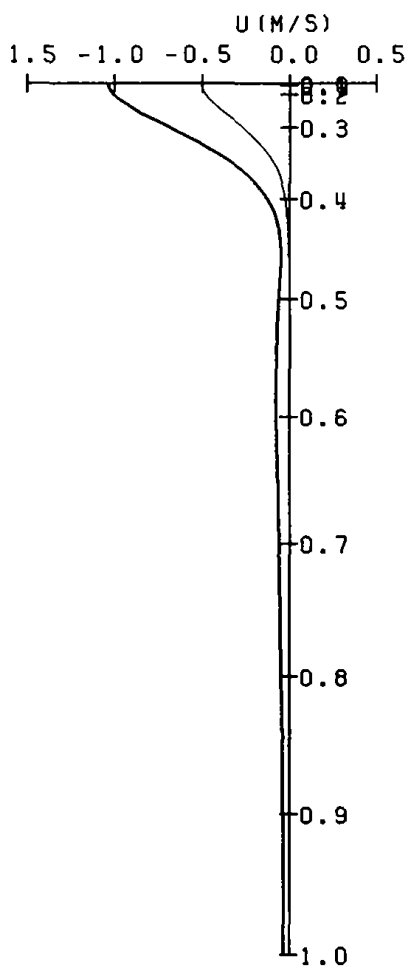


Fig. 6(d).

— T = 3.5 HOURS      — T = 240.0 HOURS

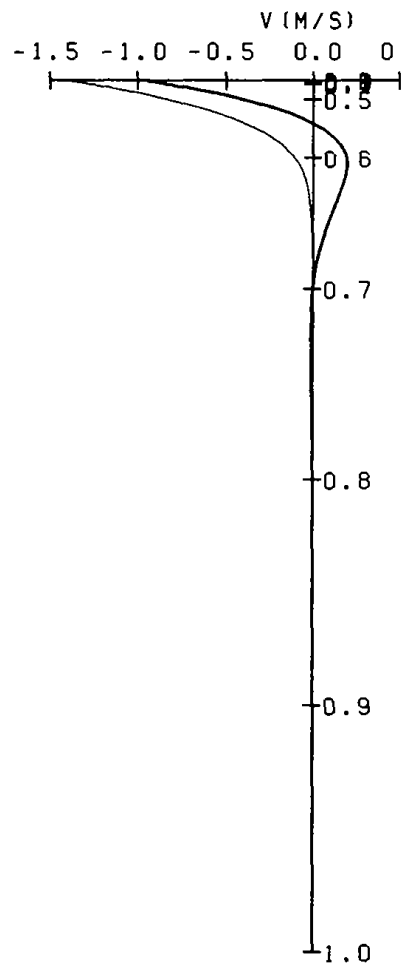
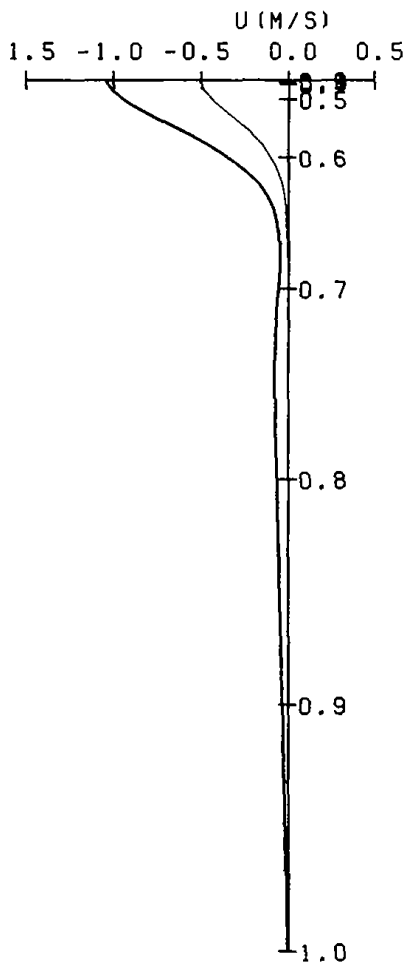


Fig. 7(a).



— T = 3.5 HOURS      — T = 240.0 HOURS

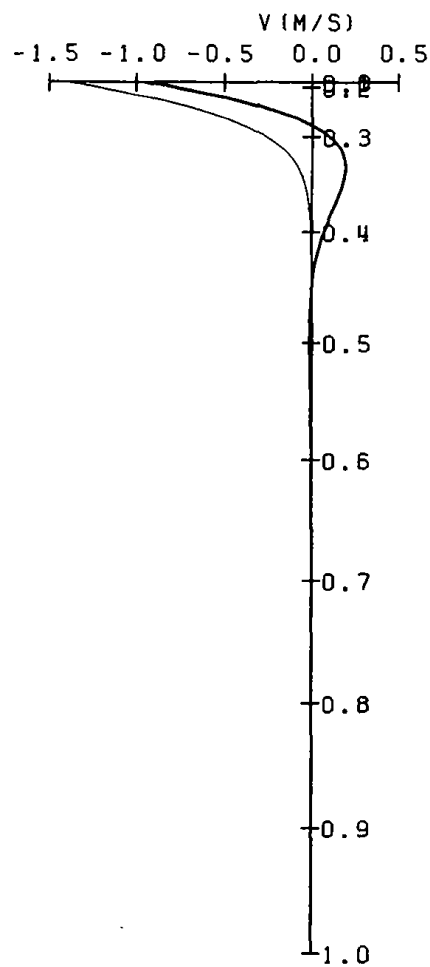
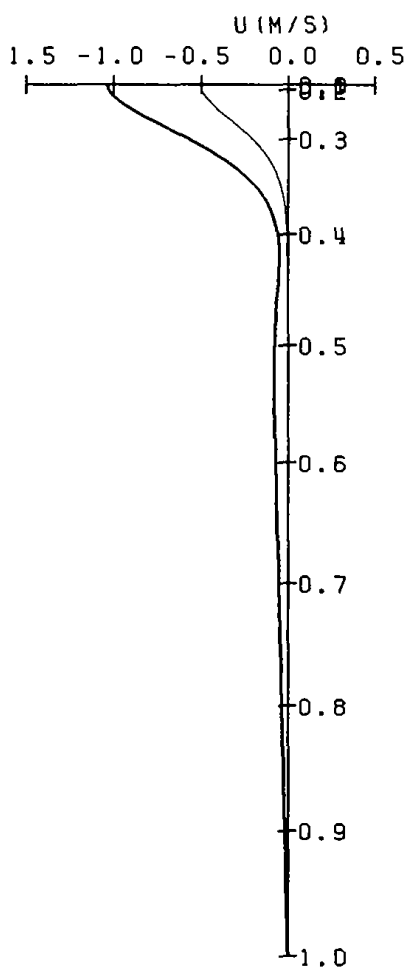


Fig. 7(b).

— T = 3.5 HOURS      — T = 240.0 HOURS

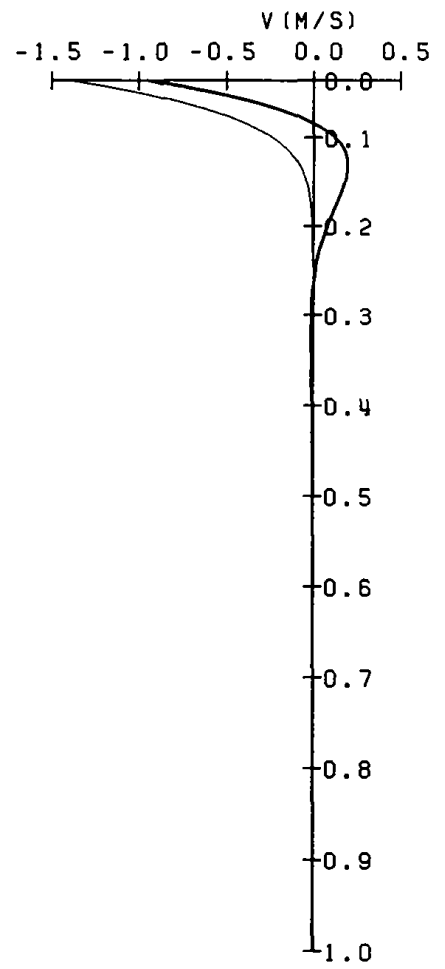
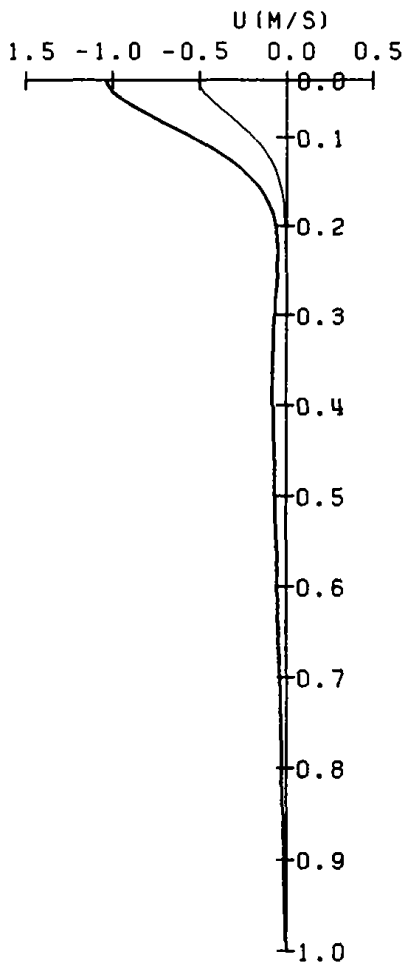


Fig. 7(c).

— T = 3.5 HOURS      — T = 240.0 HOURS

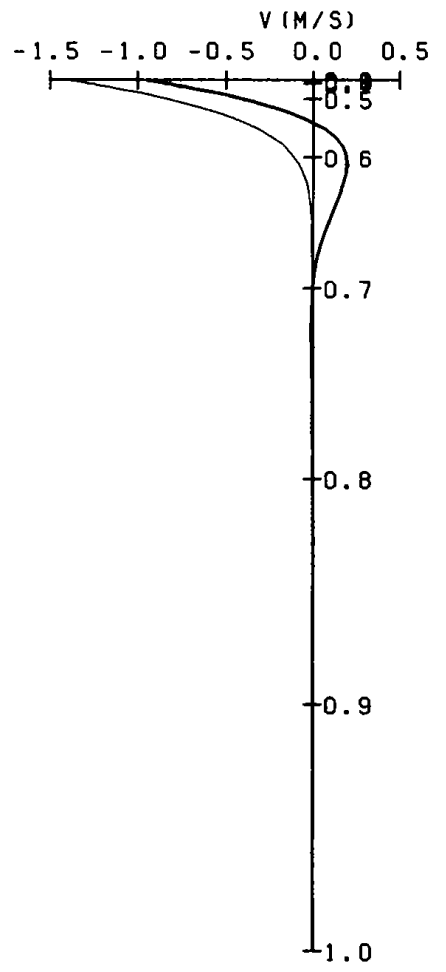
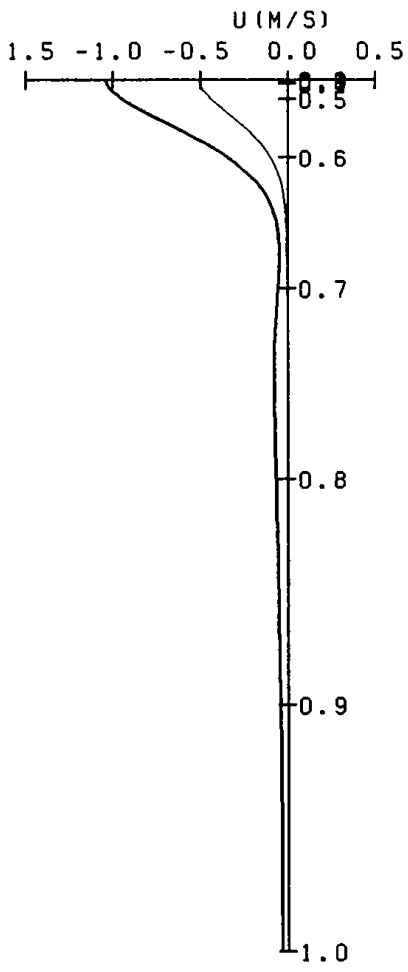


Fig. 7(d).

— T = 3.5 HOURS      — T = 240.0 HOURS

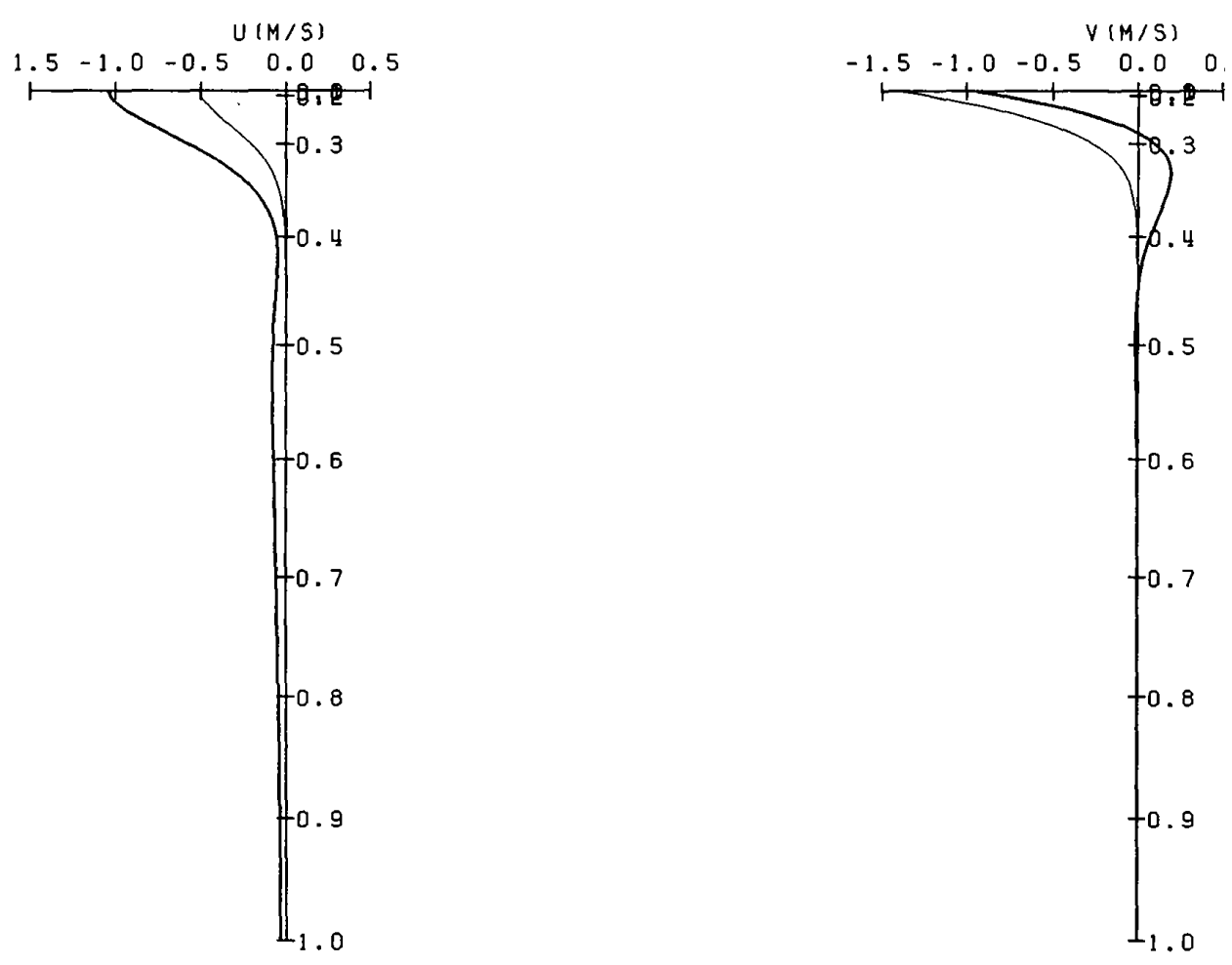


Fig. 7(e).

— T = 3.5 HOURS      — T = 240.0 HOURS

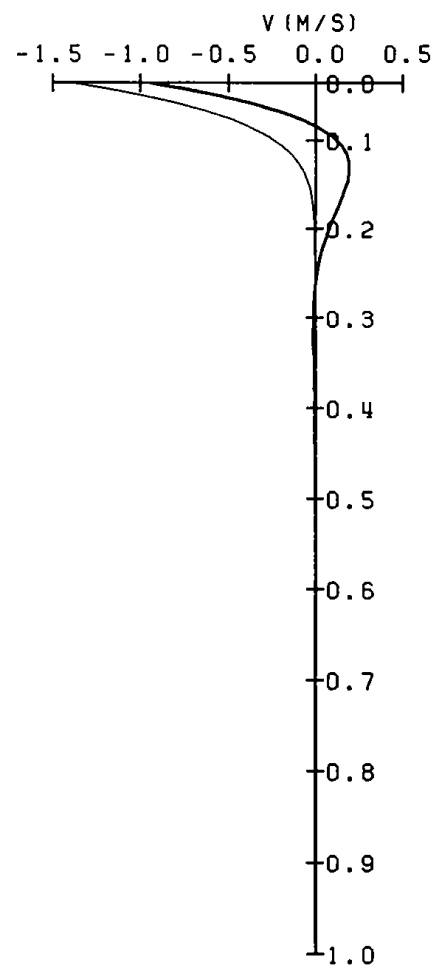
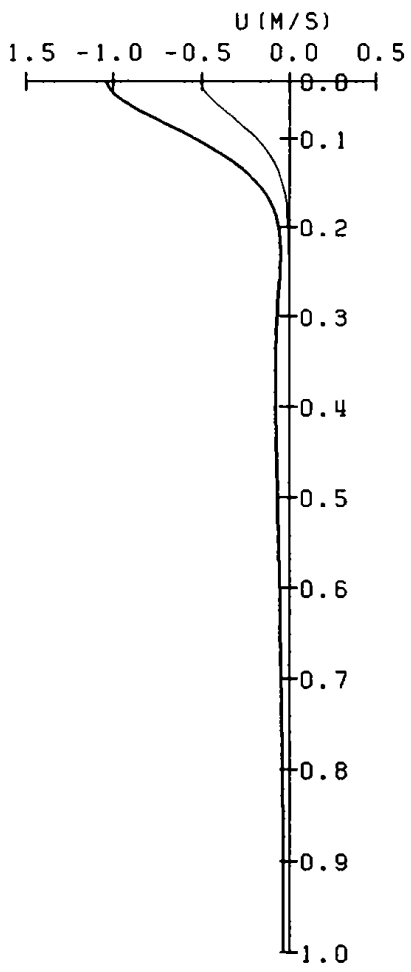


Fig. 7(f).

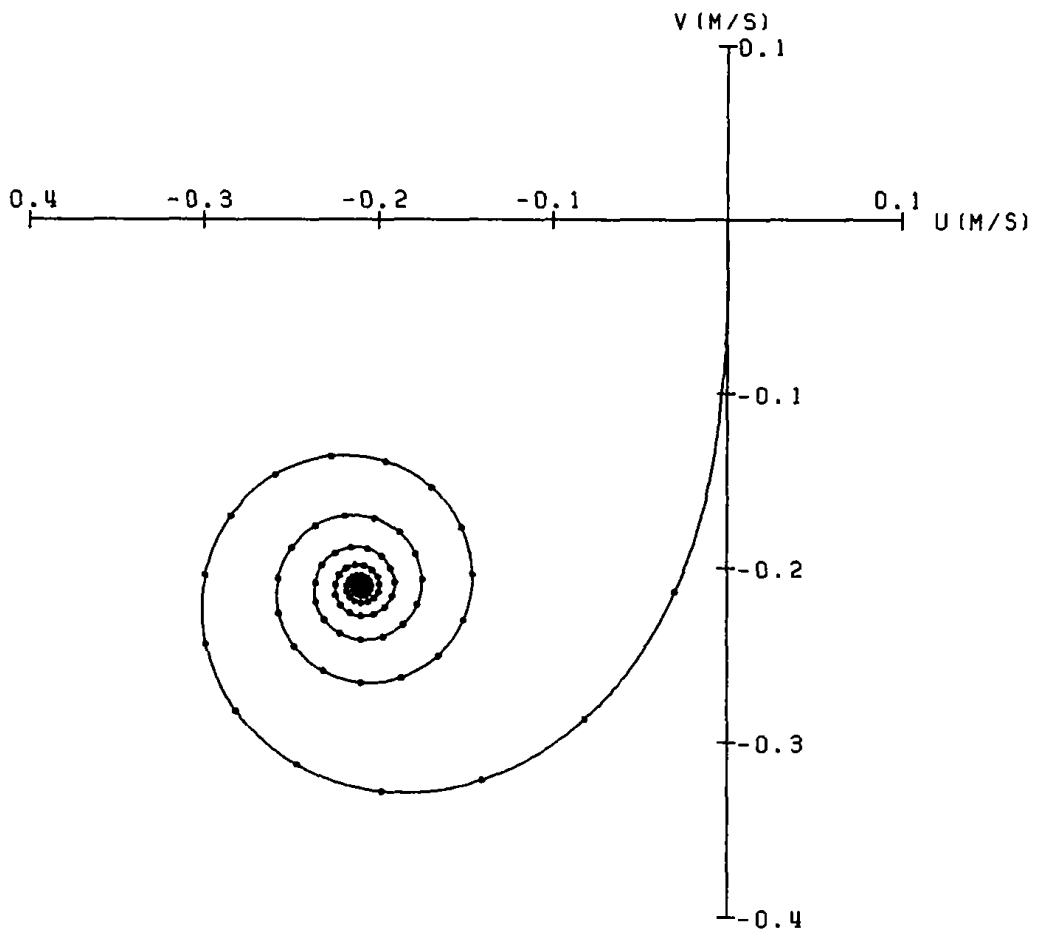


Fig. 8(a).

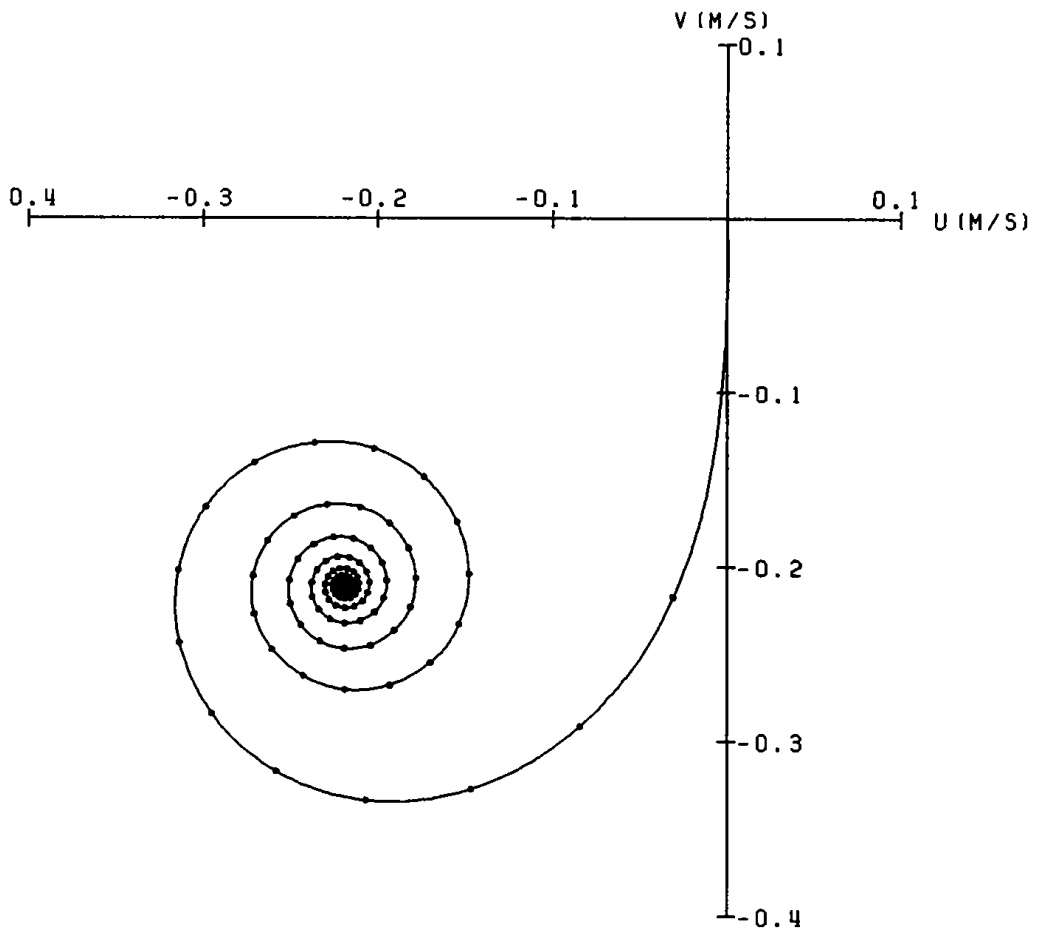


Fig. 8(b).

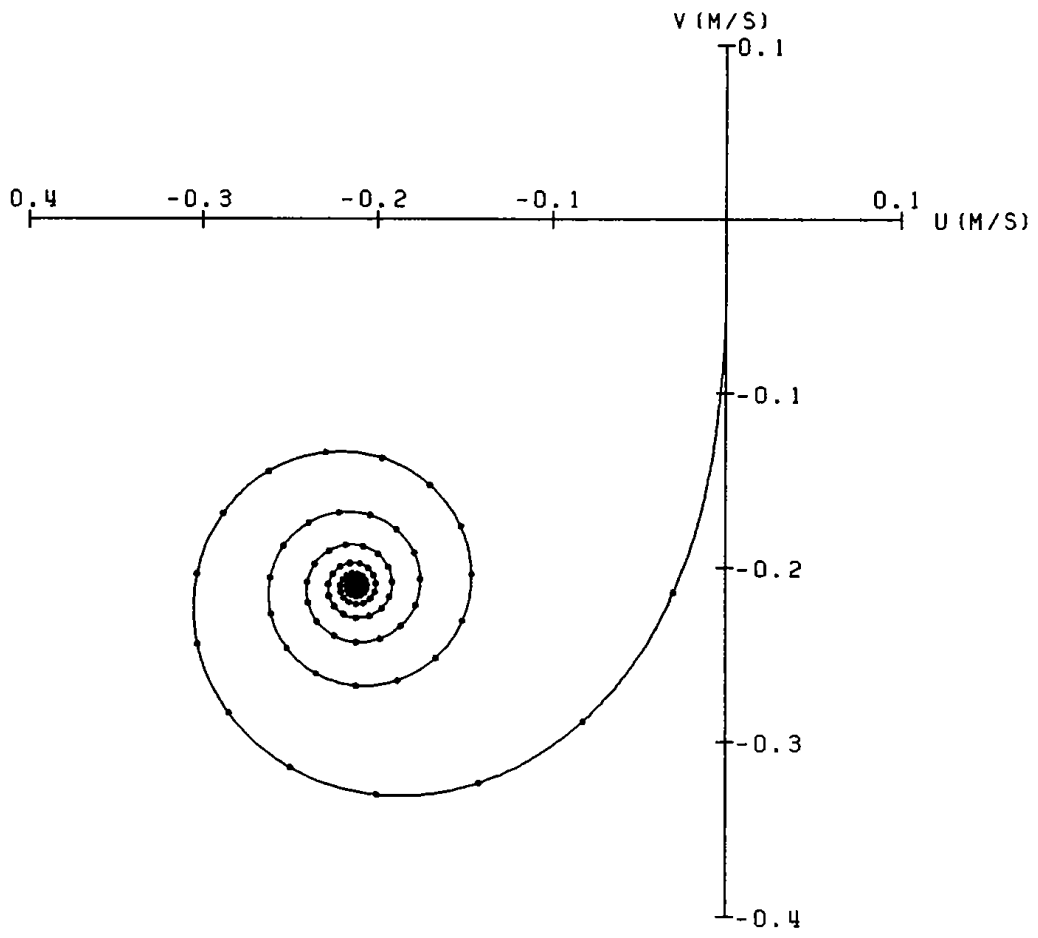


Fig. 8(c).



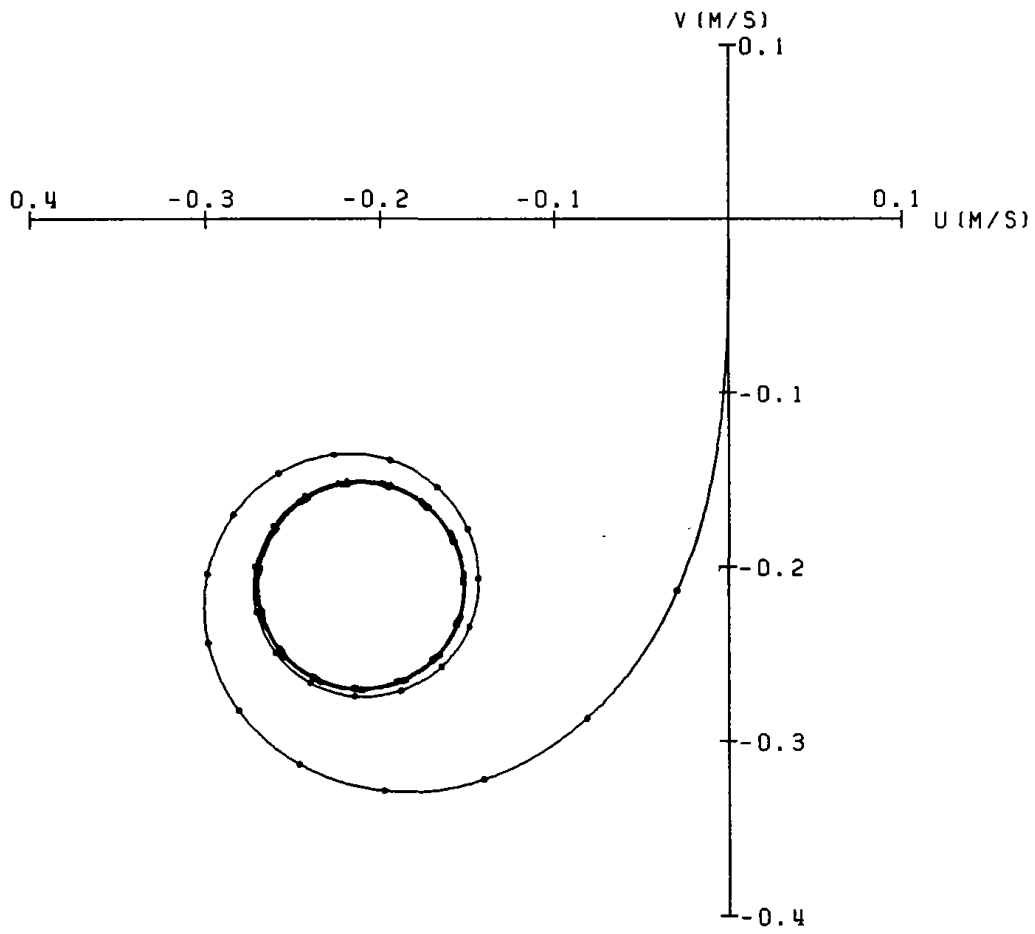


Fig. 9(a).

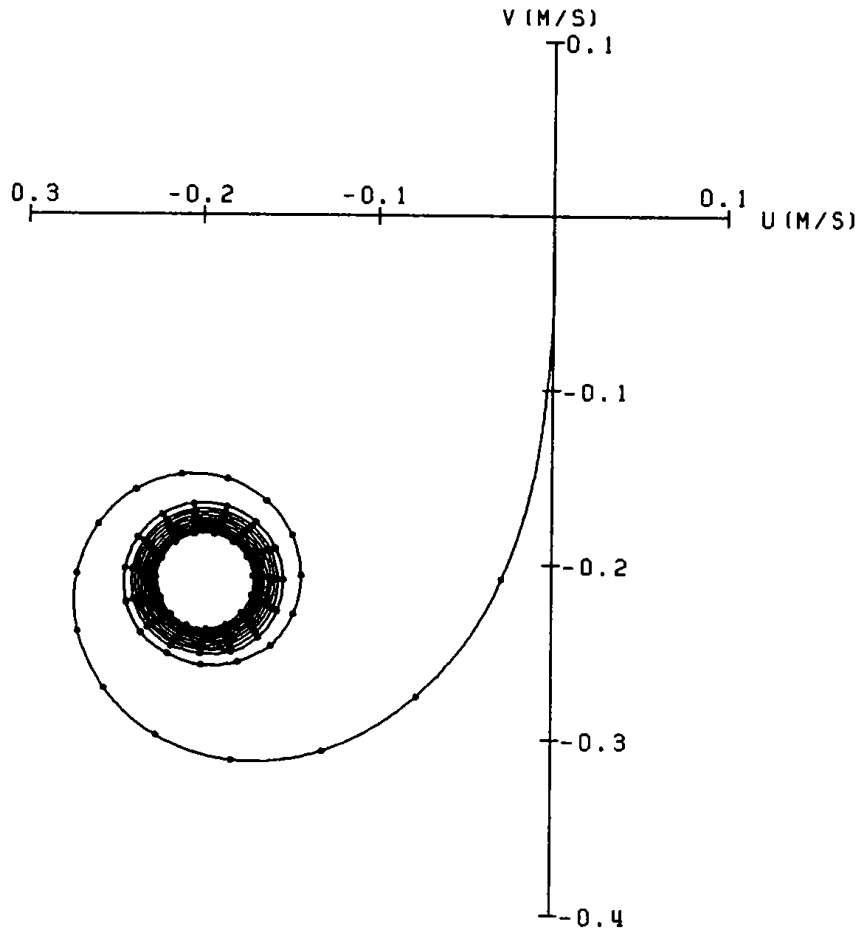


Fig. 9(b).

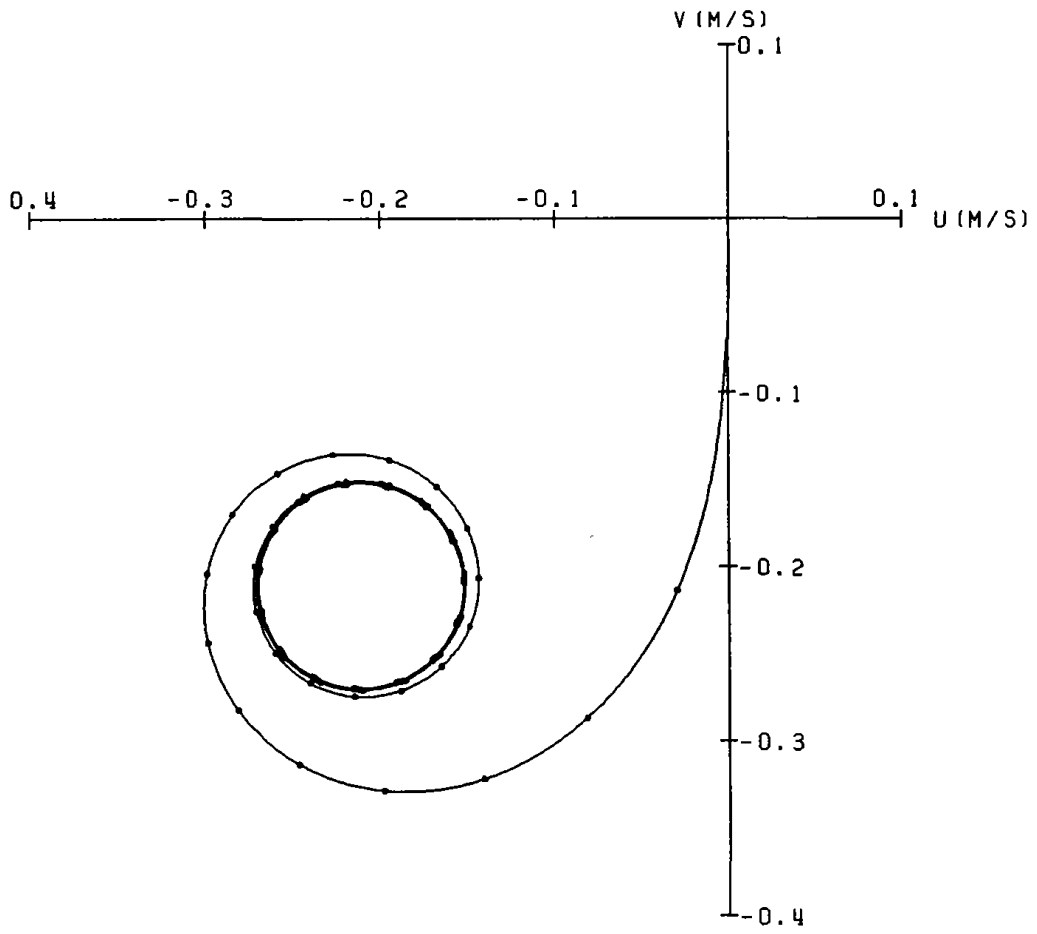


Fig. 9(a).

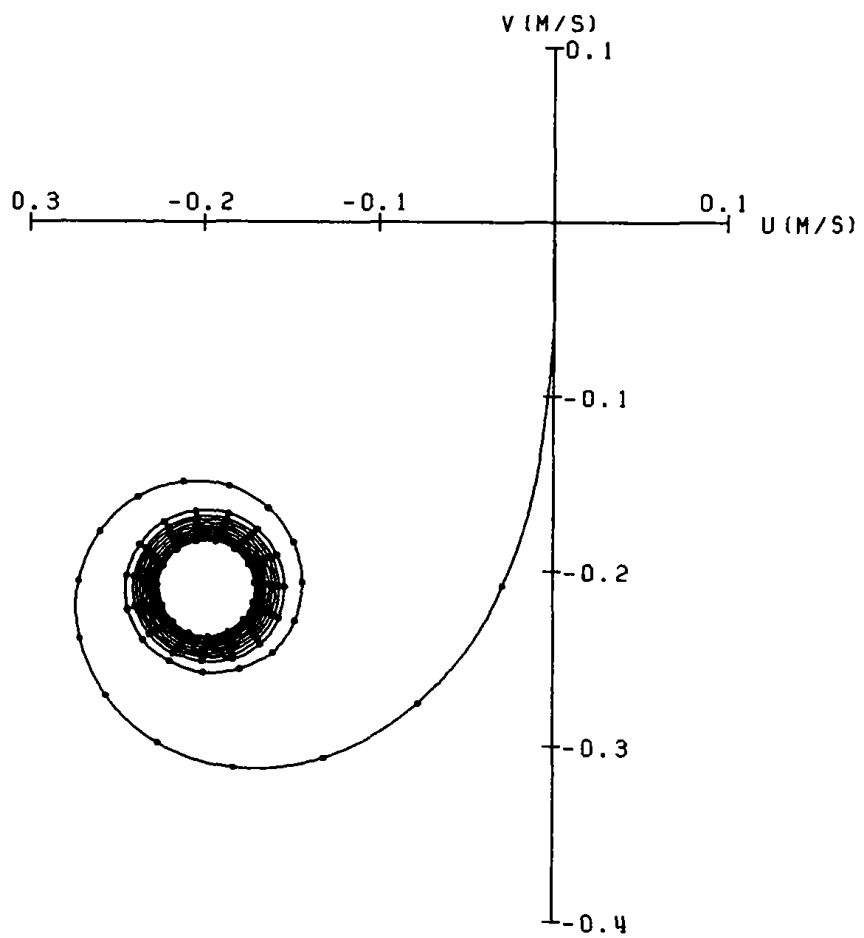


Fig. 9(b).

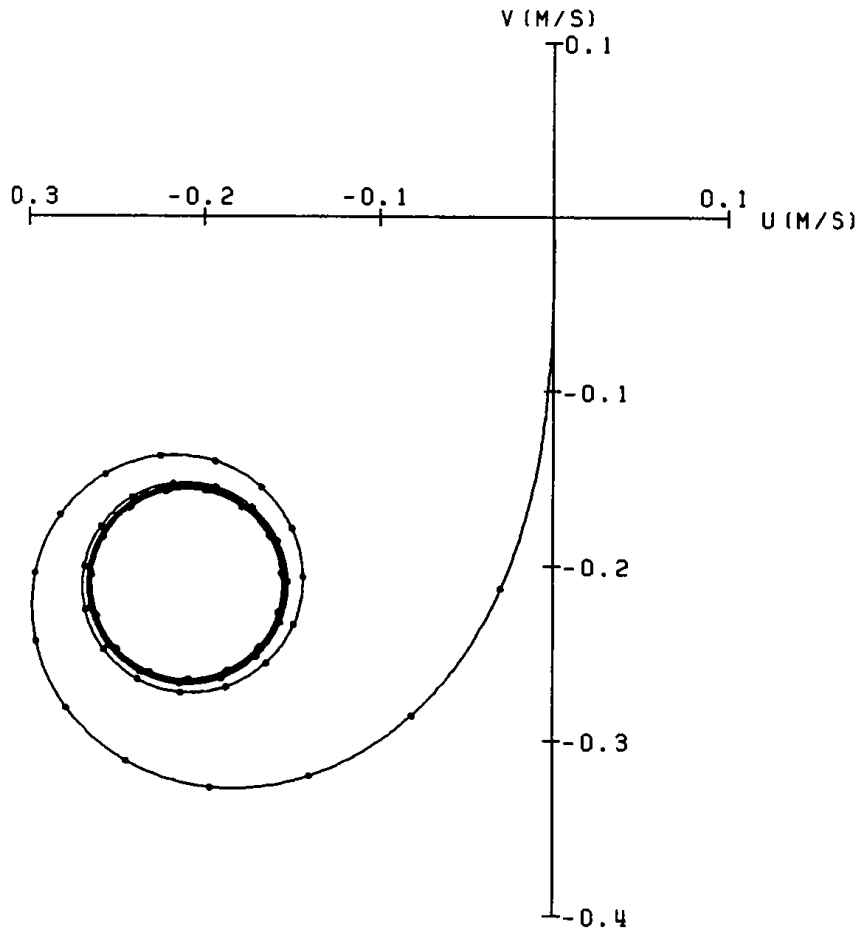


Fig. 9(c).

