BSPE 00339-647-2

파랑의 2계 상호작용에 관한 기초연구

A Study on the Second Order Interactions of Sea Surface Waves

1993. 12.

한 국 해 양 연 구 소

제 출 문

한국해양연구소장 귀하

본 보고서를 "파랑의 2계 상호작용에 관한 기초연구" 사업의 연구보고서로 제출합니다.

1993년 12월

한국해양연구소

연구책임자 : 오 병 철

요 약 문

해파의 2계 비선형 상호작용을 계산할 수 있는 기본식을 이산형과 연속형의 관점에서 정식화하였다. 이산형 모형은 Stokes의 second order wave theory을 다방향 불규칙 파랑장으로 확장한 결과와 동일하다. 또한 파랑에 의해 유도되는 압력, 수립자의 속도 및 가속도에 대한 2계 상호작용을 이산형으로 표현하였으며, 연안구조물에 작용하는 파력, 연안의 토사이동 현상 등의 이해에 응용할 수 있을 것으로 기대된다. 연속형 모형에서는 2계 상호작용에 의한 표면파의 2계 에너지 스펙트럼을 계산할 수 있는 기본식을 유도하였다. 2계 에너지 스펙트럼은 선형파 이론에 의한 1계 스펙트럼의 convolution integral로 표현되었으며, 파랑의 스펙트럼 분석에서 나타나는 고주파와 저주파대의 파랑 에너지 구조를 설명하는데 유용하다.

ABSTRACT

The basic equations computing the secondary interactions of sea surface waves were derived in both discrete form and continuous form. The discrete formulation for sea surface elevation is the generalization of the second order wave theory by Stokes. The discrete expressions for subsurface pressures, water particle velocities and accelerations were also calculated and they are considered to play a role in grasping the computation of wave forces action on coastal structures and the littoral processes including wave breaking and sediment transport. In continuous formulation of secondary interactions, the expression related to second order spectrum was derived. The second order energy spectrum is represented by the convolution integral of the first order spectrum and well explains the wave energies in low and high frequency bands.

목 차

제 1 장 서 론

해양에서의 파랑은 불규칙·비선형이므로, 그 특성을 잘 파악하는 것은 해안·해양공학에 있어서 불가결의 기초적인 요소이다. 파랑의 불규칙성은 주파수와 파향에 관한 파랑 에너지의 분포로 표현된다. 에너지 스펙트럼의 개념은 파랑장이 완전한 선형적인 성질을 갖는다는 기본가정하에 그 이론이 전개된다. 그러나 실제의 파랑장은 엄밀히 말해서 비선형장이나, 그 크기가 선형적인 성분에 비하여 상당히 작은 경우가 대부분이므로 선형적으로 생각하여 기존의 에너지 스펙트럼 이론을 유용하게 적용할 수 있다. 심해의 백파, surf zone 등과 같이 비선형성이 현저한 파랑장의 경우 선형적인 스펙트럼 이론은 실제의 현상과 큰 오차를 유발할 수 있다. 외국에서는 비선형 파랑이 체계적으로 연구되어 독일의 Hasselman group은 파랑의 비선형 효과를 스펙트럼의 파라메타 표현하여 심해파랑을 추산하는 HYPA 모델을 개발하여 실무에 응용하고 있으나, 우리나라의 경우에는 연구사례가 전무한 상태이다.

심해역에서 파랑의 비선형 상호작용은 바람과 함께 파랑의 발달 과정을 지배하는 중요한 요소이며, 천해역 특히 surf zone에서의 강한 비선형 상호작용의 결과는 연안표사의 이동을 지배하는 유속의 분포에 영향을 미치기 때문에 평형해빈의 이동을 파악하는 데 있어서 중요하다. 또한 쇄파 구조를 이해하는 데에도 비선형성은 중요한 역할을 한다. 지금까지 surf zone의 비선형 파랑장을 평형해빈의 발달과 연계시키려는 소수의 연구가 있었으나, 아직 미비한 실정이기 때문에, 실용적으로는 선형파 이론을 사용하고 있다. 따라서 해안공학 문제 해결 기법을 제고시키기 위해서는 파랑의 비선형 효과를 잘 파악하는 것이 필요하다.

그러므로 비선형 파랑장에 관한 연구는 학술적으로는 해파의 기본적 구조 이해, 천해역에서의 쇄파 구조의 파악에 도움이 될 수 있으며, 공학적으로는 해안선 변형 등

littoral process와 관련된 분야에서 그 필요성이 요구되고 있다.

본 연구에서는 해파의 2계 비선형 상호작용을 실제에 응용하기 위한 전 단계의 과정으로서 2계 상호작용항을 이산형과 연속형으로 정식화(formulation)하였다. 본 연구의 결과는 심해파랑의 발달 과정 이해, 비선형성이 강한 쇄파대내에서의 파랑운동 파악 등의 연구에의 활용성이 크다고 생각된다. 또한 파랑의 2계 상호작용에 의해 생성되는 스펙트럼에 관한 식을 유도하였으며, 이는 통상의 스펙트럼 이론으로 잘 설명이 되지 않는 고주파 성분의 에너지 분포를 이해하는 데 많은 도움을 줄 것으로 기대된다.

제 2 장 지배방정식 및 경계조건

제 1 절 지배방정식

파랑에 의한 수면변위 및 수립자의 운동을 기술하기 위한 기본 방정식은 다음의 연속 방정식과 운동량 방정식이다.

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) \tag{2.2}$$

여기서 물은 비압축 비성성 유체로 간주되었다. $\vec{u}$는 수립자의 속도, p는 압력, ρ는 밀도, g는 중력가속도이다. 흐름이 비회전류이라고 가정하면 속도 포텐샬(velocity potential)이 존재한다. 속도포텐샬을 Φ라 하면

$$\vec{u} = \nabla \Phi \tag{2.3}$$

이 된다. 일반적으로 유체의 유동장을 해석하기 위해서는 식(2.1)과 식(2.2)로 주어지는 4개의 방정식을 풀어야 한다. 그러나 속도포텐샬이 존재하는 유동장의 경우에는 스칼라(scalar) 양으로 정의되는 포텐샬로부터 식(2.3)을 사용하여 유동장을 해석할 수 있는 장점이 있다. 비회전류에 대하여는 대류항(convective acceleration)은 식(2.4)와 같다.

$$\vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = \frac{1}{2} \nabla |\vec{u}|^2 - \vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}) = \frac{1}{2} \nabla |\vec{u}|^2 \tag{2.4}$$

식(2.3)을 식(2.1)과 식(2.2)에 대입하고 식(2.4)를 이용하면 다음식을 얻는다.

$$\nabla \cdot \nabla\Phi = \nabla^2\Phi = 0 \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + \frac{p}{\rho} + gz = -Q(t) \tag{2.6}$$

식(2.5)는 속도포텐샬에 관한 Laplace 방정식이며 이의 해는 조화함수(harmonic function)으로 알려져 있다. 식(2.6)은 운동량 방정식 식(2.2)의 적분형으로서 Bernoulli 방정식으로 알려져 있으며 $Q(t)$는 Bernuolli 상수이다. 따라서 주어진 경계조건과 식(2.5)로 부터 속도포텐샬을 구하여 유동장을 해석하는 것이 연속방정식과 운동량방정식으로 구성되는 4개의 방정식을 풀어서 유동장을 해석하는 것이 훨씬 간편함을 알 수 있다. 선형(linear)인 Laplace 방정식인 식(2.5)를 풀 때 식(2.6)은 경계조건을 제공한다. 그러나 식(2.6)은 비선형항을 포함하고 있기 때문에 식(2.5)를 정확하게(exactly) 해석하는 것은 일반적으로 불가능하다.

제 2 절 경계조건

속도포텐샬에 대한 Laplace 방정식은 타원형(elliptic)이기 때문에 해석하고자 하는 유동장의 모든 경계에서 하나의 경계조건이 부여되어야 한다. 파랑해석에서 사용되는 경계조건으로는 운동학적경계조건(kinematic boundary condition)과 동역학적 경계조건(dynamic boundary condition) 및 측면경계조건(lateral boundary condition)이 있다.

2.1 운동학적 경계조건

자유수면 또는 유체와 고체의 경계가 다음과 같이 표현된다고 가정한다.

$$z = \zeta(x, y, t) \tag{2.7}$$

또는

$$F(x,y,z,t) = z - \zeta(x,y,t) = 0 \tag{2.8}$$

경계면을 따라서 전미분(substantial derivative)을 구하면

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla F = \frac{\partial F}{\partial t} + u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \tag{2.9}$$

여기서 $u = \partial\Phi/\partial x$, $v = \partial\Phi/\partial y$, $w = \partial\Phi/\partial z$, $\partial F/\partial x = -\partial\zeta/\partial x$, $\partial F/\partial y = \partial\zeta/\partial y$, $\partial F/\partial z = 1$, $\partial F/\partial t = -\partial\zeta/\partial t$ 이므로

$$-\frac{\partial\zeta}{\partial t} - \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x} - \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial y} + \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \tag{2.10}$$

따라서

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial y} \quad \text{on } F(x,y,z,t) = 0 \tag{2.11}$$

그러므로 불투수성 해저(impermenable sea bottom)의 경우에는 $\zeta = -h(x,y,t)$이므로 식(2.11)은 다음과 같다.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = -\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y} \quad \text{on } z = -h(x,y,t) \tag{2.12}$$

식(2.12)는 저면경계조건(BBC:Bottom Boundary Condition)라 부른다. 특히 수심이 일정한 경우에는 $h(x,y,t)$ = constant 이므로

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on } z = -h : \text{BBC} \tag{2.13}$$

한편 자유수면은 $z = \eta(x,y,t)$ 또는 $F(x,y,z,t) = z - \eta(x,y,t) = 0$ 이므로 식(2.11)은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{d\eta}{dt} \quad \text{on } z = \eta(x,y,t) \quad (2.14)$$

식(2.14)는 자유수면의 운동에 관한 조건이며 운동학적 자유수면 경계조건(KFSBC: Kinematic Free Surface Boundary Condition)이라 부른다.

2.2 동역학적 경계조건

동력학적 경계조건은 Bernoulli 방정식으로 부터 구해진다. 자유수면에서 압력은 대기압과 동일하므로 식(2.6)은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla \Phi|^2 + \frac{p_a}{\rho} + g\eta = -Q \quad \text{on } z = \eta \qquad (2.15)$$

여기서 p_a는 대기압으로 일반적으로 zero를 취한다($p_a = 0$). 식(2.15)를 η에 대하여 풀면 식(2.16)과 같다.

$$\eta = -\frac{1}{g}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla \Phi|^2 + Q(t)\right] \quad \text{on } z = \eta \qquad (2.16)$$

식(2.16)은 자유수면에 작용하는 힘에 관한 조건이며 동역학적 자유수면 경계조건(DFSBC: Dynamic Free Surface Boundary Condition)이라 부른다.

2.3 합성자유수면 경계조건

수면파에 의한 유동장을 해석할 때 통상 Laplace 방정식으로 부터 속도포텐샬을 주어진 경계조건으로 부터 구한다. 그런데 두 개의 자유수면 경계조건(식(2.14)와 식(2.16))은 속도포텐샬(Φ)과 수표면 변위(η)의 연립방정식이므로 이 두 조건식에서 η를 소거하면 합성 자유수면 경계조건(CFSBC:Combined Free Surface Boundary

Condition)을 얻는다. Bernoulli 방정식에 전미분을 취하면

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) + \frac{d}{dt}\frac{|\nabla\Phi|^2}{2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \frac{d}{dt}(gz) + \frac{dQ}{dt} = 0 \qquad (2.17)$$

자유수면에서 $p = p_a = 0$이고 Q는 t만의 함수이므로

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)+\vec{u}\cdot\nabla\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\frac{|\nabla\Phi|^2}{2}+\vec{u}\cdot\nabla\frac{|\nabla\Phi|^2}{2}+g\frac{d\eta}{dt}+\frac{\partial Q}{\partial t}=0 \qquad (2.18)$$

여기서

$$\vec{u}\cdot\nabla\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \nabla\Phi\cdot\frac{\partial}{\partial t}\nabla\Phi = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{|\nabla\Phi|^2}{2} \qquad (2.19)$$

이므로 식(2.18)은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+g\frac{d\eta}{dt}+\frac{\partial}{\partial t}|\nabla\Phi|^2+\frac{1}{2}\nabla\Phi\cdot\nabla|\nabla\Phi|^2+\frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \quad \text{on } z=\eta \qquad (2.20)$$

KFSBC(식(2.14))를 식(2.20)에 대입하면 CFSBC를 얻는다.

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial t}|\nabla\Phi|^2+\frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \quad \text{on } z=\eta \qquad (2.21)$$

2.4 측면경계조건

지금까지는 해저와 자유수면에서 만족해야 할 경계조건에 관하여 논의하였다. 타원형 미분방정식은 모든 경계에서 하나의 조건이 부여되어야 풀리므로 측면의 경계조건이 있어야 한다. 일반적으로 수면파는 주기적으로 x와 y 방향으로 전파하는 물리현상으로 생각할 수 있으므로 측면경계조건(lateral boundary condition)은 주기성으로 결정된다. 즉

$$\Phi(x,y,t) = \Phi(x+L_x,y,t) = \Phi(x,y+L_y,t) \tag{2.2}$$

여기서 L_x와 L_y는 파장의 x 및 y 방향 성분이다.

따라서 파랑에 의한 수면변위 및 유동장 해석을 위한 지배방정식 및 경계조건 정리하면 다음과 같다.

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad \text{on} \quad -h \leq z \leq \eta,\ -\infty < x,y < \infty \tag{2.}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on} \quad z = -h \tag{2.1}$$

$$\eta = -\frac{1}{g}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + Q(t)\right] \quad \text{on} \quad z = \eta \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}|\nabla\Phi|^2 + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \quad \text{on} \quad z = \eta \tag{2.2}$$

$$\Phi(x,y,t) = \Phi(x+L_x,y,t) = \Phi(x,y+L_y,t) \tag{2.2}$$

제 3 장 이산형 모형

이산형 모형이란 파랑의 에너지가 파수와 주파수의 불연속(discrete)적인 값에서 정의될 때 선형파 이론(first order wave theory)으로 부터 구해여진 해수면 변위의 제 2 계 상호작용에 의하여 생성되는 파동량(속도포텐샬, 수면변위, 압력, 속도, 가속도 등)을 정식화(formulation)하는 것을 의미한다. 수심은 균일하다고 가정한다. 속도포텐샬에 대한 지배방정식인 Laplace 방정식과 저면경계조건은 선형이지만 두 개의 자유수면 경계조건은 비선형이다. 따라서 속도 포텐샬에 대한 엄밀해(exact solution)를 구하는 것은 일반적으로 불가능하다. 많이 이용되는 파랑이론은 자유수면 경계조건을 선형화한 선형파 이론(linear wave theory)이다. 많은 경우에 있어서 선형파 이론은 상당히 좋은 근사해를 제공하지만 비선형 효과가 중요해지는 천해역 특히 쇄파대 등에서는 선형파 이론에 의한 결과는 많은 오차를 수반한다. 이러한 경우에 자유수면 경계조건의 비선형항을 고려하여야 실제 현상에 가까운 근사해를 구할 수 있다. 이 때 많이 사용되는 방법이 섭동법(perturbation method)이다. 섭동법에는 해를 perturbation하는 방법과 지배방정식을 perturbation하는 방법이 있으며 전자가 일반적으로 많이 사용된다. 여기서도 전자의 방법을 사용하기로 한다.

지배방정식과 자유수면 경계조건에 나타나는 미지수 Φ, η 및 Q를 perturbation series로 전개하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} + \cdots \\
\eta &= \eta^{(1)} + \eta^{(2)} + \cdots \\
Q &= Q^{(1)} + Q^{(2)} + \cdots
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

여기서 perturbation parameter(ε)는 각 solution에 포함된다.

$$
\Phi^{(2)} = \varepsilon^2\Phi^{(2)},\ \eta^{(2)} = \varepsilon^2\eta^{(2)},\ Q^{(2)} = \varepsilon^2 Q^{(2)} \cdots \tag{3.2}
$$

식(3.1)을 지배방정식(식1.5))과 경계존건(식(2.13), 식(2.16) 및 식(2.21))에 대입하면 ε에 대하여 정리하면 각 order에 대한 선형의 지배방정식과 경계조건을 구할 수 있으며 이를 순차적으로 풀어서 해를 구한다.

1) 지배방정식

$$\nabla^2\phi = \nabla^2(\phi^{(1)} + \phi^{(2)} + \cdots) = \nabla^2\phi^{(1)} + \nabla^2\phi^{(2)} + \cdots = 0 \tag{3.3}$$

그러므로 다음식을 얻는다.

$$\nabla^2\phi^{(1)} = 0 \quad : \text{first drder} \tag{3.4}$$

$$\nabla^2\phi^{(2)} = 0 \quad : \text{second order} \tag{3.5}$$

2) 저면경계조건(BBC)

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}[\phi^{(1)}+\phi^{(2)}+\cdots] = \frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial z} + \cdots = 0 \quad \text{on} \ \ z=-h \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial z} = 0 \quad \text{on} \quad z = -h : \text{first order} \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial z} = 0 \quad \text{on} \ z = -h \quad : \text{second order} \tag{3.8}$$

3) 합성자유수면 경계조건(CFSBC)

$z = \eta$ 에서의 물리량을 Maclaurin 급수를 사용하여 $z = 0$ 에서의 값으로 표시하면 다음과 같다.

$$f(x,y,\eta,t) = f(x,y,0,t) + \eta\frac{\partial}{\partial z}f(x,y,0,t) + \frac{\eta^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}f(x,y,0,t) + \cdots \tag{3.9}$$

따라서 식(3.9)를 이용하면 CFSBC는

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial t}|\nabla\Phi|^2+\frac{1}{2}\nabla\Phi\cdot\nabla|\nabla\Phi|^2+\frac{\partial\Phi}{\partial t} \\
&+\eta\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial t}|\nabla\Phi|^2+\frac{1}{2}\nabla\Phi\cdot\nabla|\nabla\Phi|^2+\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right] \\
&+\frac{\eta^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial t}|\nabla\Phi|^2+\frac{1}{2}\nabla\Phi\cdot\nabla|\nabla\Phi|^2+\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right] \\
&+\cdots\cdots \\
&=\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial z}+\frac{\partial Q^{(1)}}{\partial t} \\
&\quad+\frac{\partial^2\Phi^{(2)}}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial z}+\frac{\partial Q^{(2)}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}|\nabla\Phi^{(1)}|^2 \\
&\quad+\eta^{(1)}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial z}\right]+\cdots\cdots=0 \quad \text{at } z=0
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

그러므로 first oder 및 second order CFSBC는 다음과 같다.

$$
\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial z}+\frac{\partial Q^{(1)}}{\partial t}=0 \tag{3.11}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\Phi^{(2)}}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial z}+\frac{\partial Q^{(2)}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}|\nabla\Phi^{(1)}|^2 \\
&\qquad+\eta^{(1)}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial z}\right]=0
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

4) 동역학적 자유수면 경계조건(DFSBC)

마찬가지로 식(3.1)을 식(2.16)에 대입한다.

$$
\eta=-\frac{1}{g}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2+Q\right]-\frac{1}{g}\eta\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2\right]+\cdots \quad \text{at } z=0 \tag{3.13}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ \eta&=\eta^{(1)}+\eta^{(2)}+\cdots\cdots=-\frac{1}{g}\left[\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial t}+Q^{(1)}\right] \\
&\quad-\frac{1}{g}\left[\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial t}+\frac{1}{2}|\nabla\Phi^{(1)}|^2+Q^{(2)}+\eta^{(1)}\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial z\partial t}\right]+\cdots \quad \text{at } z=0
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

따라서 자유수면의 first order 및 second order 항은 다음과 같다.

$$\eta^{(1)} = -\frac{1}{g}\left[\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} + Q^{(1)}\right] \tag{3.15}$$

$$\eta^{(2)} = -\frac{1}{g}\left[\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla \Phi^{(1)}|^2 + Q^{(2)} + \eta^{(1)}\frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial z \partial t}\right] \tag{3.16}$$

Third order, fourth order 및 higher order 해에 관한 지배방정식과 경계조건은 위와 같은 방법을 순차적으로 적용하여 구할 수 있으나 그 결과식의 항의 갯수는 차수가 증가할수록 기하급수적으로 증가한다. 위에서 전개한 first order 및 second order에 관한 식을 고찰해 보면, first order 식은 CFSBC가 제차방정식(homogeneous equation)의 형태를 갖고 있으나 second order에 대한 CFSBC는 비제차방정식(inhomogeneous equation)이다. 일반적으로 perturbation analysis에서 비제차방정식의 해에는 secular 항이 생길 수 있다. secular 항은 발산하는 해를 야기시키므로 적절한 방법을 사용하여 이러한 항이 생기지 않도록 해야 한다. secular 항을 제거하는 기법으로는 Lindstedt-Poincare technique, method of renormalization, method of multiple scales 및 method of averaging 등이 있다(Nayfeh, 1981)

제 1 절 수표면의 first order solution

앞에서 전개한 식 가운데서 first order 항만 모으면 다음과 같다.

$$\nabla^2 \Phi^{(1)} = 0 \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} = 0 \quad \text{on} \quad z = -h \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial t^2} + g\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial Q^{(1)}}{\partial t} = 0 \tag{3.11}$$

$$\eta^{(1)} = -\frac{1}{g}\left[\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} + Q^{(1)}\right] \tag{3.15}$$

파수와 주파수가 각각 $\overrightarrow{k_n}$ 및 σ_n인 진행파를 생각하면 first order 속도포텐샬은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Phi^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\cosh k_n(h+z)}{\cosh k_n h} \sin(\overrightarrow{k_n} \cdot \vec{x} - \sigma_n t + \varepsilon_n) \tag{3.17}$$

식(3.17)은 지배방정식 식(3.4)와 저면경계조건 식(3.7)을 만족시키며 x 및 y와 시간에 대한 harmonic function이다. 식(3.17)에서 $\vec{x} = (x,y)$이며 ε_n은 random phase이다. 따라서 Bernoulli 상수를 zero로 하면 수면변위는 식(3.17)을 식(3.15)에 대입하여 구할 수 있다.

$$\eta^{(1)} = \frac{1}{g}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sigma_n \cos\psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\psi_n \tag{3.18}$$

여기서 a_n과 ψ_n은 각각 성분파의 진폭과 위상을 나타내며 다음식으로 표현된다.

$$a_n = \frac{b_n \sigma_n}{g} \tag{3.19}$$

$$\psi_n = \overrightarrow{k_n} \cdot \vec{x} - \sigma_n t + \varepsilon_n \tag{3.20}$$

한편 식(3.17)을 식(3.11)에 대입하면 파수와 주파수의 관계를 결정하는 분산관계식 (dispersion relationship)을 얻는다.

$$\sigma_n^2 = g|\overrightarrow{k_n}|\tanh|\overrightarrow{k_n}|h \tag{3.21}$$

이상 언급한 first order theory는 선형파 이론으로 알려져 있다. 식(3.18)에서 보는 바와 같이 선형파 이론에서는 수표면이 독립적으로 전파하는 sinusoid의 합으로 표현된다. 선형파 이론에 의한 압력, 수립자 속도 및 가속도의 계산은 second order 항을 취급할 때 함께 하기로 한다.

제 2 절 수표면의 2계 상호작용

앞에서와 마찬가지로 second order 항에 관한 방정식을 모으면 다음과 같다.

$$\nabla^2\Phi^{(2)} = 0 \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial z} = 0 \quad \text{on } z = -h \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\Phi^{(2)}}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial z} + \frac{\partial Q^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}|\nabla\Phi^{(1)}|^2 \\ + \eta^{(1)}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial z}\right] = 0\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\eta^{(2)} = -\frac{1}{g}\left[\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\Phi^{(1)}|^2 + Q^{(2)} + \eta^{(1)}\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial z\,\partial t}\right] \tag{3.16}$$

선형파 이론에서와는 달리 second order theory에서는 CFSBC(식(3.12))가 비제차방정식으로 주어져 있으므로 먼저 선형파 이론의 결과를 사용하여 forcing term을 각 항별로 계산한다.

$$\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial x} = \sum_{i=1}^{\infty} b_i k_i \cos\theta_i \frac{\cosh k_i(h+z)}{\cosh k_i h}\cos\psi_i$$

$$\therefore \left.\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x}\right|_{z=0} = \sum_{i=1}^{\infty} b_i k_i \cos\theta_i \cos\psi_i \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial y} = \sum_{i=1}^{\infty} b_i k_i \sin\theta_i \frac{\cosh k_i(h+z)}{\cosh k_i h} \cos\psi_i$$

$$\therefore \left.\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial y}\right|_{z=0} = \sum_{i=1}^{\infty} b_i k_i \sin\theta_i \cos\psi_i \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} = \sum_{i=1}^{\infty} b_i k_i \frac{\sinh k_i(h+z)}{\cosh k_i h} \sin\psi_i$$

$$\therefore \left.\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z}\right|_{z=0} = \sum_{i=1}^{\infty} b_i k_i \tanh k_i h \sin\psi_i \tag{3.24}$$

여기서 $k_i = |\vec{k_i}|$이다. 또한 $R_i = k_i \tanh k_i h$라 하고

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} f_i f_j \tag{3.25}$$

임을 고려하면 다음식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
|\nabla\Phi^{(1)}|^2 &= \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z}\right)^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i k_i \cos\theta_i \cos\psi_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i k_i \sin\theta_i \cos\psi_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i R_i \sin\psi_i\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j k_i k_j \cos\theta_i \cos\theta_j \cos\psi_i \cos\psi_j \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j k_i k_j \sin\theta_i \sin\theta_j \cos\psi_i \cos\psi_j \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j R_i R_j \sin\psi_i \sin\psi_j
\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$
\begin{aligned}
|\nabla\Phi^{(1)}|^2 &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j [k_i k_j(\cos\theta_i\cos\theta_j+\sin\theta_i\sin\theta_j)\cos\psi_i\cos\psi_j + R_iR_j\sin\psi_i\sin\psi_j] \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j [k_i k_j\cos(\theta_i-\theta_j)\cos\psi_i\cos\psi_j + R_iR_j\sin\psi_i\sin\psi_j] \qquad (3.27)\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j (\vec{k_i}\cdot\vec{k_j}\cos\psi_i\cos\psi_j + R_iR_j\sin\psi_i\sin\psi_j)
\end{aligned}
$$

한편 삼각함수의 가법정리를 적용하여 곱을 합으로 표현하면 식(3.27)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$
\begin{aligned}
|\nabla\Phi^{(1)}|^2 &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j [\vec{k_i}\cdot\vec{k_j}\{\cos(\psi_i+\psi_j)+\cos(\psi_i-\psi_j)\} \\
&\qquad - R_iR_j\{\cos(\psi_i+\psi_j)-\cos(\psi_i-\psi_j)\}] \qquad (3.28)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j \{(\vec{k_i}\cdot\vec{k_j}-R_iR_j)\cos(\psi_i+\psi_j)+(\vec{k_i}\cdot\vec{k_j}+R_iR_j)\cos(\psi_i-\psi_j)\}
\end{aligned}
$$

식(3.28)을 시간에 대해서 미분하면

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}|\nabla\Phi^{(1)}|^2 &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j \{(\sigma_i+\sigma_j)(\vec{k_i}\cdot\vec{k_j}-R_iR_j)\sin(\psi_i+\psi_j) \\
&\qquad + (\sigma_i-\sigma_j)(\vec{k_i}\cdot\vec{k_j}+R_iR_j)\sin(\psi_i-\psi_j)\} \qquad (3.29)
\end{aligned}
$$

를 얻는다. 식(3.29)는 CFSBC(식(3.12))의 forcing term 중 첫번째 항이다. 다음에는 forcing term 중 두번째항을 구한다. 먼저 first order 속도포텐샬을 시간에 대해서 두번 미분한 것과 z에 대하서 한 미분한 것을 식(3.17)을 사용하여 구하면 다은과 같다.

$$
\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial t^2} = -\sum_{i=1}^{\infty} b_i\sigma_i^2\frac{\cosh k_i(h+z)}{\cosh k_i h}\sin\psi_i \qquad (3.30)
$$

$$
\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial z} = \sum_{i=1}^{\infty} b_i k_i\frac{\sinh k_i(h+z)}{\cosh k_i h}\sin\psi_i \qquad (3.31)
$$

$$\therefore \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+g\frac{\partial}{\partial z}\right]\Phi^{(1)} = \sum_{i=1}^{\infty}\left\{-b_i\sigma_i^2\frac{\cosh k_i(h+z)}{\cosh k_i h}+gb_ik_i\frac{\sinh k_i(h+z)}{\cosh k_i h}\right\}\sin\psi_i \tag{3.32}$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+g\frac{\partial}{\partial z}\right]\Phi^{(1)} = \sum_{i=1}^{\infty}\left\{-b_i\sigma_i^2k_i\frac{\sinh k_i(h+z)}{\cosh k_i h}+gb_ik_i^2\frac{\cosh k_i(h+z)}{\cosh k_i h}\right\}\sin\psi_i \tag{3.33}$$

식(3.33)에 $z = 0$을 대입하면

$$\therefore \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+g\frac{\partial}{\partial z}\right]_{z=0}\Phi^{(1)} = \sum_{i=1}^{\infty}\{-b_i\sigma_i^2R_i+gb_ik_i^2\}\sin\psi_i \tag{3.34}$$

을 얻는다. 그러므로

$$\begin{aligned}\eta^{(1)}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+g\frac{\partial}{\partial z}\right]\Phi^{(1)} &= \sum_{i=1}^{\infty}a_i\cos\psi_i\sum_{j=1}^{\infty}(-b_j\sigma_j^2R_j+gb_jk_j^2)\sin\psi_j \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\{b_ib_j\sigma_ik_j^2-b_ib_j\sigma_iR_j^2\}\cos\psi_i\sin\psi_j\end{aligned} \tag{3.35}$$

여기서 $ga_i=b_i\sigma_i$, $\sigma_j^2=gR_j$, $a_i=b_i\sigma_i/g$의 관계식이 사용되었다. 한편 삼각함수의 가법정리를 사용하여 곱을 합으로 고치고 i와 j를 바꿔쓰면

$$\begin{aligned}\eta^{(1)}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+g\frac{\partial}{\partial z}\right]\Phi^{(1)} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}b_ib_j[\sigma_i(k_j^2-R_j^2)\{\sin(\psi_i+\psi_j)-\sin(\psi_i-\psi_j)\}] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}b_ib_j[\sigma_j(k_i^2-R_i^2)\{\sin(\psi_i+\psi_j)+\sin(\psi_i-\psi_j)\}]\end{aligned} \tag{3.36}$$

이다.

$$\begin{aligned}\therefore 2\eta^{(1)}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+g\frac{\partial}{\partial z}\right]\Phi^{(1)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}b_ib_j[&\{\sigma_i(k_j^2-R_j^2)+\sigma_j(k_i^2-R_i^2)\}\sin(\psi_i+\psi_j) \\ &-\{\sigma_i(k_j^2-R_j^2)-\sigma_j(k_i^2-R_i^2)\}\sin(\psi_i-\psi_j)]\end{aligned} \tag{3.37}$$

그러므로 forcing term의 두번째항은 다음과 같다.

$$\eta^{(1)}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+g\frac{\partial}{\partial z}\right]\phi^{(1)}$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}b_ib_j[\{\sigma_i(k_j^2-R_j^2)+\sigma_j(k_i^2-R_i^2)\}\sin(\psi_i+\psi_j) -\{\sigma_i(k_j^2-R_j^2)-\sigma_j(k_i^2-R_i^2)\}\sin(\psi_i-\psi_j)] \quad (3.38)$$

식(3.29)와 식(3.38)을 식(3.12)에 대입하면 second order 속도포텐샬에 대한 미분방정식을 얻는다.

$$\frac{\partial^2\phi^{(2)}}{\partial t^2}+g\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial z}$$
$$=-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}b_ib_j\{2(\sigma_i+\sigma_j)(\vec{k_i}\cdot\vec{k_j}-R_iR_j)+\sigma_i(k_j^2-R_j^2)+\sigma_j(k_i^2-R_i^2)\}\sin(\psi_i+\psi_j) \quad (3.39)$$
$$-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}b_ib_j\{2(\sigma_i-\sigma_j)(\vec{k_i}\cdot\vec{k_j}+R_iR_j)-\sigma_i(k_j^2-R_j^2)+\sigma_j(k_i^2-R_i^2)\}\sin(\psi_i-\psi_j)$$

식(3.39)는 선형이므로 $\phi^{(2)}$를 다음과 같이 가정한다.

$$\phi^{(2)} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\phi_{ij}^{(2)} \quad (3.40)$$

따라서 식(3.5)와 식(3.8) 그리고 식(3.39)를 동시에 만족시키는 특수해는 다음과 같이 가정한다.

$$\phi_{ij}^{(2)}=A_{ij}\frac{\cosh k_{ij}^{+}(h+z)}{\cosh k_{ij}^{+}h}\sin(\psi_i+\psi_j)+B_{ij}\frac{\cosh k_{ij}^{-}(h+z)}{\cosh k_{ij}^{-}h}\sin(\psi_i-\psi_j) \quad (3.41)$$

여기서 A_{ij}와 B_{ij}는 미정계수이며 $k_{ij}^{+}=|\vec{k_i}+\vec{k_j}|$, $k_{ij}^{-}=|k_i^{-}-k_j^{-}|$로 각각 super harmonic, subharmonic 성분을 의미한다. 즉 식(3.41)은 superharmonic와 subharmonic이 분리될 수 있다는 가정을 한 것이다. 식(3.41)을 식(3.39)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+g\frac{\partial}{\partial z}\right]_{z=0}\Phi_{ij}^{(2)}=A_{ij}\{gk_{ij}^{+}\tanh k_{ij}^{+}h-(\sigma_i+\sigma_j)^2\}\sin(\psi_i+\psi_j)+B_{ij}\{gk_{ij}^{-}\tanh k_{ij}^{-}h-(\sigma_i-\sigma_j)^2\}\sin(\psi_i-\psi_j) \tag{3.42}$$

식(3.39)와 식(3.42)로 부터 미정계수 A_{ij}와 B_{ij}를 구할 수 있다.

$$A_{ij}=\frac{1}{4}\frac{b_ib_j\{2(\sigma_i+\sigma_j)(\vec{k_i}\cdot\vec{k_j}-R_iR_j)+\sigma_i(k_j^2-R_j^2)+\sigma_j(k_i^2-R_i^2)\}}{(\sigma_i+\sigma_j)^2-gk_{ij}^{+}\tanh k_{ij}^{+}h} \tag{3.43}$$

$$B_{ij}=\frac{1}{4}\frac{b_ib_j\{2(\sigma_i-\sigma_j)(\vec{k_i}\cdot\vec{k_j}+R_iR_j)-\sigma_i(k_j^2-R_j^2)+\sigma_j(k_i^2-R_i^2)\}}{(\sigma_i-\sigma_j)^2-gk_{ij}^{-}\tanh k_{ij}^{-}h} \tag{3.44}$$

$\sigma^2 = gR$의 관계식을 사용하여 g를 소거하면 다음과 같다.

$$A_{ij}=\frac{1}{4}b_ib_j\frac{D_{ij}^{+}}{\sigma_i+\sigma_j} \tag{3.45}$$

$$B_{ij}=\frac{1}{4}b_ib_j\frac{D_{ij}^{-}}{\sigma_i-\sigma_j} \tag{3.46}$$

여기서

$$D_{ij}^{+}=\frac{2(\sqrt{R_i}+\sqrt{R_j})^2(\vec{k_i}\cdot\vec{k_j}-R_iR_j)+(\sqrt{R_i}+\sqrt{R_j})\{\sqrt{R_i}(k_j^2-R_j^2)+\sqrt{R_j}(k_i^2-R_i^2)\}}{(\sqrt{R_i}+\sqrt{R_j})^2-k_{ij}^{+}\tanh k_{ij}^{+}h} \tag{3.47}$$

$$D_{ij}^{-}=\frac{2(\sqrt{R_i}-\sqrt{R_j})^2(\vec{k_i}\cdot\vec{k_j}+R_iR_j)-(\sqrt{R_i}-\sqrt{R_j})\{\sqrt{R_i}(k_j^2-R_j^2)-\sqrt{R_j}(k_i^2-R_i^2)\}}{(\sqrt{R_i}-\sqrt{R_j})^2-k_{ij}^{-}\tanh k_{ij}^{-}h} \tag{3.48}$$

그러므로 second order 속도포텐샬의 ij성분은 다음과 같이 구해진다.

$$\Phi_{ij}^{(2)} = \frac{1}{4} b_i b_j \frac{\cosh k_{ij}^{+}(h+z)}{\cosh k_{ij}^{+} h} \frac{D_{ij}^{+}}{\sigma_i + \sigma_j} \sin(\psi_i + \psi_j) + \frac{1}{4} b_i b_j \frac{\cosh k_{ij}^{-}(h+z)}{\cosh k_{ij}^{-} h} \frac{D_{ij}^{-}}{\sigma_i - \sigma_j} \sin(\psi_i - \psi_j) \tag{3.49}$$

$\Phi^{(2)}$는 자유수면 경계조건의 비선형항에 의하여 first order term이 결과로서 생기는 항으로서 제 2 계 상호작용항(second order interaction term)이라고 부른다.

한편 D_{ij}^{+}와 D_{ij}^{-}는 k_i만의 함수이며 $D_{ij}^{+}=D_{ji}^{+}$, $D_{ij}^{-}=D_{ji}^{-}$이므로 대칭인 행열로 표현할 수 있다. 식(3.49)를 식(3.40)에 대입하면 second order 속도포텐샬을 얻는다.

$$\Phi^{(2)} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j \frac{\cosh k_{ij}^{+}(h+z)}{\cosh k_{ij}^{+} h} \frac{D_{ij}^{+}}{\sigma_i + \sigma_j} \sin(\psi_i + \psi_j) + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j \frac{\cosh k_{ij}^{-}(h+z)}{\cosh k_{ij}^{-} h} \frac{D_{ij}^{-}}{\sigma_i - \sigma_j} \sin(\psi_i - \psi_j) \tag{3.50}$$

한편 second order 수면 변위를 구하기 위하여 식(3.50)을 식(3.16)에 대입한다.

$$\eta^{(2)} = -\frac{1}{g}\left[\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi^{(1)}|^2 + \eta^{(1)} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial z \partial t} \right] \quad \text{at } z=0 \tag{3.51}$$

속도포텐샬에 대한 first order solution과 second order solution을 식(3.51)에 대입하여 항별로 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial t}\right|_{z=0} &= -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j D_{ij}^{+} \cos(\psi_i + \psi_j) - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j D_{ij}^{-} \cos(\psi_i - \psi_j) \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_i a_j \frac{g}{\sqrt{R_i R_j}} D_{ij}^{+} \cos(\psi_i + \psi_j) - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_i a_j \frac{g}{\sqrt{R_i R_j}} D_{ij}^{-} \cos(\psi_i - \psi_j) \end{aligned} \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\nabla \Phi^{(1)}|^2 &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j \{ (\vec{k_i} \cdot \vec{k_j} - R_i R_j) \cos(\psi_i + \psi_j) \\ &\qquad + (\vec{k_i} \cdot \vec{k_j} + R_i R_j) \cos(\psi_i - \psi_j) \} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_i a_j \frac{g(\vec{k_i} \cdot \vec{k_j} - R_i R_j)}{\sqrt{R_i R_j}} \cos(\psi_i + \psi_j) \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_i a_j \frac{g(\vec{k_i} \cdot \vec{k_j} + R_i R_j)}{\sqrt{R_i R_j}} \cos(\psi_i - \psi_j) \end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\eta^{(1)}\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial z\partial t}\bigg|_{z=0}=-\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}ga_ia_jR_j\cos\psi_i\cos\psi_j$$
$$=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}ga_ia_jR_j\{\cos(\psi_i+\psi_j)+\cos(\psi_i-\psi_j)\} \tag{3.54}$$
$$=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}ga_ia_jR_i\{\cos(\psi_i+\psi_j)+\cos(\psi_i-\psi_j)\}$$

그러므로

$$\eta^{(1)}\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial z\partial t}=-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_ia_jg(R_i+R_j)\cos(\psi_i+\psi_j)$$
$$-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_ia_jg(R_i+R_j)\cos(\psi_i-\psi_j) \tag{3.55}$$

식(3.52), 식(3.53) 및 식(3.55)를 식(3.51)에 대입하면 수면변위에 대한 second order 해를 얻는다.

$$\eta^{(2)}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_ia_j\left\{\frac{D_{ij}^{+}-(\vec{k_i}\cdot\vec{k_j}-R_iR_j)}{\sqrt{R_iR_j}}+(R_i+R_j)\right\}\cos(\psi_i+\psi_j) \tag{3.56}$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_ia_j\left\{\frac{D_{ij}^{-}-(\vec{k_i}\cdot\vec{k_j}+R_iR_j)}{\sqrt{R_iR_j}}+(R_i+R_j)\right\}\cos(\psi_i-\psi_j)$$

그리고

$$H_{ij}^{\pm}=D_{ij}^{\pm}-(\vec{k_i}\cdot\vec{k_j}\mp R_iR_j)+\sqrt{R_iR_j}(R_i+R_j)=H_{ji}^{\pm} \tag{3.57}$$

라 하면 식(3.56)은 다음과 같다.

$$\eta^{(2)}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_ia_j}{\sqrt{R_iR_j}}[H_{ij}^{+}\cos(\psi_i+\psi_j)+H_{ij}^{-}\cos(\psi_i-\psi_j)] \tag{3.58}$$

또한 가법정리를 사용하여 식(3.56)을 다시 정리하면 다음식을 얻는다.

$$\eta^{(2)}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_ia_j\left\{\frac{D_{ij}^{+}+D_{ij}^{-}-2\vec{k_i}\cdot\vec{k_j}}{\sqrt{R_iR_j}}+2(R_i+R_j)\right\}\cos\psi_i\cos\psi_j \tag{3.59}$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_ia_j\left\{\frac{D_{ij}^{-}-D_{ij}^{+}-2R_iR_j}{\sqrt{R_iR_j}}\right\}\sin\psi_i\sin\psi_j$$

식(3.59)에서 $i = j = 1$인 경우에 대하여 전개한 결과는 Stokes의 second order wave thoery와 동일하다. 따라서 식(3.59)는 Stokes의 second order wave theory를 다방향 불규칙파랑에 적용할 수 있도록 확장된 것이다.

제 3 절 압력의 2계 상호작용

속도포텐샬이 결정되면 Bernoulli 방정식(식(2.6))을 사용하여 압력을 구할 수 있다. 압력도 속도포텐샬과 마찬가지로 perturbation series로 전개할 수 있다고 생각한다.

$$p = p^{(1)} + p^{(2)} + \cdots \tag{3.60}$$

식(3.60)과 식(3.1)을 식(2.6)에 대입하면 다음과 같다. 여기서 Bernoulli 상수는 속도포텐샬의 시간 미분항에 포함되어 있다고 생각하면 영으로 놓을 수 있다.

$$\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} + \frac{p^{(1)}}{\rho} + gz + \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla \Phi^{(1)}|^2 + \frac{p^{(2)}}{\rho} + \cdots = 0 \tag{3.61}$$

각 order 별로 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} + \frac{p^{(1)}}{\rho} + gz = 0 \tag{3.62}$$

$$\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial t} + \frac{p^{(2)}}{\rho} + \frac{1}{2}|\nabla \Phi^{(1)}|^2 = 0 \tag{3.63}$$

식(3.62)는 first order 압력에 관한 식이며 식(3.63)은 second order 압력에 관한 식이다. 위 두식을 압력에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$p^{(1)} = -\rho \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} - \rho g z \tag{3.64}$$

$$p^{(2)} = -\rho \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho |\nabla \Phi^{(1)}|^2 \tag{3.65}$$

식(3.17)을 식(3.64)에 대입하면 압력에 대한 first order 해를 얻는다.

$$p^{(1)} = \rho g \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left\{ a_i \frac{\cosh k_i (h+z)}{\cosh k_i h} \cos \psi_i \right\} - z \right] \tag{3.66}$$

First order 압력의 응답계수를 다음과 같이 정의한다.

$$K_{p_i} = \frac{\cosh k_i (h+z)}{\cosh k_i h} \tag{3.67}$$

따라서 식(3.66)은

$$p^{(1)} = \rho g \left[\sum_{i=1}^{\infty} (a_i K_{p_i} \cos \psi_i) - z \right] \tag{3.68}$$

로 쓸 수 있다.

Second order pressure를 계산하기에 앞서 수식의 단순화를 위하여 다음과 같은 기호를 정의한다.

$$\begin{aligned} b_i &= \frac{a_i g}{\sigma_i} \\ K_i &= \frac{\cosh k_i (h+z)}{\cosh k_i h} \\ T_i &= \frac{\sinh k_i (h+z)}{\cosh k_i h} \end{aligned} \tag{3.69}$$

그러면 식(3.17)로 부터

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x} &= \sum_{i=1}^{\infty} b_i k_i K_i \cos\theta_i \cos\psi_i \\
\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial y} &= \sum_{i=1}^{\infty} b_i k_i K_i \sin\theta_i \cos\psi_i \\
\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} &= \sum_{i=1}^{\infty} b_i k_i T_i \sin\psi_i
\end{aligned} \tag{3.70}$$

이며 식(3.25)를 적용하면 식(3.70)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x}\right)^2 &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j k_i k_j K_i K_i \cos\theta_i \cos\theta_j \cos\psi_i \cos\psi_j \\
\left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial y}\right)^2 &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j k_i k_j K_i K_j \sin\theta_i \sin\theta_j \cos\psi_i \cos\psi_j \\
\left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z}\right)^2 &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j k_i k_j T_i T_j \sin\psi_i \sin\psi_j
\end{aligned} \tag{3.71}$$

식(3.71)의 세 식을 더하면

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}|\nabla\Phi^{(1)}|^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j k_i k_j [\,&(K_i K_j \cos\theta_{ij}^- - T_i T_j)\cos(\psi_i + \psi_j) \\
&+ (K_i K_j \cos\theta_{ij}^- + T_i T_j)\cos(\psi_i - \psi_j)]
\end{aligned} \tag{3.72}$$

로 된며, 여기서 $\theta_{ij}^- = \theta_i - \theta_j$ 이다. 한편 second order 속도포텐샬로 부터 다음식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial t} =& -\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j \frac{\cosh k_{ij}^+(h+z)}{\cosh k_{ij}^+ h} D_{ij}^+ \cos(\psi_i + \psi_j) \\
& -\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j \frac{\cosh k_{ij}^-(h+z)}{\cosh k_{ij}^- h} D_{ij}^- \cos(\psi_i - \psi_j)
\end{aligned} \tag{3.73}$$

식(3.72)와 식(3.73)을 식(3.65)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
p^{(2)} =& \frac{\rho}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j \left[\frac{\cosh k_{ij}^+(h+z)}{\cosh k_{ij}^+ h} D_{ij}^+ - k_i k_j \{K_i K_j \cos\theta_{ij}^- - T_i T_j\}\right]\cos(\psi_i + \psi_j) \\
&+ \frac{\rho}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j \left[\frac{\cosh k_{ij}^-(h+z)}{\cosh k_{ij}^- h} D_{ij}^- - k_i k_j \{K_i K_j \cos\theta_{ij}^- + T_i T_j\}\right]\cos(\psi_i - \psi_j)
\end{aligned} \tag{3.74}$$

한편 쌍곡선함수의 가법공식을 적용하면

$$K_iK_j = \frac{\cosh k_{ij}^P(h+z) + \cosh k_{ij}^M(h+z)}{\cosh k_{ij}^P h + \cosh k_{ij}^M h}$$
$$T_iT_j = \frac{\cosh k_{ij}^P(h+z) - \cosh k_{ij}^M(h+z)}{\cosh k_{ij}^P h + \cosh k_{ij}^M h} \tag{3.75}$$

이 되며, 여기서 $k_{ij}^P = |\vec{k_i}| + |\vec{k_j}|$, $k_{ij}^M = |\vec{k_i}| - |\vec{k_j}|$이다. 한편 $\gamma = \rho g$, $b_ib_j = a_ia_jg/\sqrt{R_iR_j}$라 하고 식(3.75)를 식(3.74)에 대입하면 second order 압력이 구해진다.

$$p^{(2)} = \frac{1}{4}\gamma \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_ia_j}{\sqrt{R_iR_j}} [G_{ij}^{+}\cos(\psi_i + \psi_j) + G_{ij}^{-}\cos(\psi_i - \psi_j)] \tag{3.76}$$

여기서

$$G_{ij}^{+} = \frac{\cosh k_{ij}^{+}(h+z)}{\cosh k_{ij}^{+}h} D_{ij}^{+} - \frac{k_ik_j}{\cosh k_{ij}^P h + \cosh k_{ij}^M h}\{\cosh k_{ij}^P(h+z)[\cos\theta_{ij}^{-} - 1] + \cosh k_{ij}^M(h+z)[\cos\theta_{ij}^{-} + 1]\} \tag{3.77}$$

$$G_{ij}^{-} = \frac{\cosh k_{ij}^{-}(h+z)}{\cosh k_{ij}^{-}h} D_{ij}^{-} - \frac{k_ik_j}{\cosh k_{ij}^P h + \cosh k_{ij}^M h}\{\cosh k_{ij}^P(h+z)[1 + \cos\theta_{ij}^{-}] - \cosh k_{ij}^M(h+z)[1 - \cos\theta_{ij}^{-}]\} \tag{3.78}$$

또한 $G_{ij}^{\pm} = G_{ji}^{\pm}$이므로 대칭인 성질을 갖는다.

제 4 절 수립자의 속도의 2계 상호작용

속도포텐샬의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \nabla\Phi \\ &= \nabla(\Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} + \cdots) \\ &= \nabla\Phi^{(1)} + \nabla\Phi^{(2)} + \cdots \\ &= \vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)} + \cdots \end{aligned} \tag{3.79}$$

따라서 수립자 속도에 대한 다음식을 얻는다.

$$\vec{u}^{(1)} = \nabla \Phi^{(1)} \tag{3.80}$$

$$\vec{u}^{(2)} = \nabla \Phi^{(2)} \tag{3.81}$$

따라서 식(3.17)을 식(3.80)에 대입하여 first order velocity를 구한다.

$$u^{(1)} = \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x} = \sum_{i=1}^{\infty} b_i k_i \cos\theta_i \frac{\cosh k_i(h+z)}{\cosh k_i h} \cos\psi_i \tag{3.82}$$

$$v^{(1)} = \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial y} = \sum_{i=1}^{\infty} b_i k_i \sin\theta_i \frac{\cosh k_i(h+z)}{\cosh k_i h} \cos\psi_i \tag{3.83}$$

$$w^{(1)} = \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} = \sum_{i=1}^{\infty} b_i k_i \frac{\sinh k_i(h+z)}{\cosh k_i h} \sin\psi_i \tag{3.84}$$

한편 second order velocity는 식(3.50)을 식(3.81)에 대입하여 구한다.

$$u^{(2)} = \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j k_{ij}^{+} \cos\theta_{ij}^{P} \frac{\cosh k_{ij}^{+}(h+z)}{\cosh k_{ij}^{+} h} \frac{D_{ij}^{+}}{\sigma_i+\sigma_j} \cos(\psi_i+\psi_j)$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j k_{ij}^{-} \cos\theta_{ij}^{M} \frac{\cosh k_{ij}^{-}(h+z)}{\cosh k_{ij}^{-} h} \frac{D_{ij}^{-}}{\sigma_i-\sigma_j} \cos(\psi_i-\psi_j)$$

(3.85)

$$v^{(2)} = \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial y} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j k_{ij}^{+} \sin\theta_{ij}^{P} \frac{\cosh k_{ij}^{+}(h+z)}{\cosh k_{ij}^{+} h} \frac{D_{ij}^{+}}{\sigma_i+\sigma_j} \cos(\psi_i+\psi_j) \quad (3.86)$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j k_{ij}^{-} \sin\theta_{ij}^{M} \frac{\cosh k_{ij}^{-}(h+z)}{\cosh k_{ij}^{-} h} \frac{D_{ij}^{-}}{\sigma_i-\sigma_j} \cos(\psi_i-\psi_j)$$

$$w^{(2)} = \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j k_{ij}^{+} \frac{\sinh k_{ij}^{+}(h+z)}{\cosh k_{ij}^{+} h} \frac{D_{ij}^{+}}{\sigma_i+\sigma_j} \sin(\psi_i+\psi_j) \quad (3.87)$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j k_{ij}^{-} \frac{\sinh k_{ij}^{-}(h+z)}{\cosh k_{ij}^{-} h} \frac{D_{ij}^{-}}{\sigma_i-\sigma_j} \sin(\psi_i-\psi_j)$$

여기서 θ_{ij}^{P}는 $\vec{k_i}+\vec{k_j}$ 가 x축과 이루는 각이며, θ_{ij}^{M}은 $\vec{k_i}-\vec{k_j}$ 가 x축과 이루는 각이다.

제 5 절 가속도의 2계 상호작용

흐름이 비회전류라고 하면 가속도는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{d\vec{u}}{dt}=\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}=\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{|\vec{u}|^2}{2}\right) \tag{3.89}$$

$\vec{u}=\nabla\Phi$를 식(3.89)에 대입하여 정리하면 수립자의 가속도에 대한 first order 식과 second order 식을 얻는다. 가속도에는 비선형항이 포함되어 있기 때문에 속도 보다는 계산이 복잡해진다.

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{u}}{dt}&=\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)^{(1)}+\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)^{(2)}\cdots\cdots\\&=\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Phi)+\nabla\left(\frac{|\nabla\Phi|^2}{2}\right)\\&=\nabla\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2\right\}\\&=\nabla\left(\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial t}\right)+\nabla\left(\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial t}+\frac{1}{2}|\nabla\Phi^{(1)}|^2\right)+\cdots\end{aligned} \tag{3.90}$$

각 order 별로 정리하면 다음과 같다.

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^{(1)}=\nabla\left(\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial t}\right) \tag{3.91}$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^{(2)}=\nabla\left(\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial t}+\frac{1}{2}|\nabla\Phi^{(1)}|^2\right) \tag{3.92}$$

First order solution은 first order 속도포텐샬로 부터 직접으로 구해진다. 식(3.17)을

시간에 대해서 미분하면

$$\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{\infty} b_i \sigma_i \frac{\cosh k_i(h+z)}{\cosh k_i h} \cos\psi_i \tag{3.93}$$

이며 이 식을 식(3.91)에 대입하면 first order 가속도를 얻는다.

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^{(1)} = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \sigma_i k_i \cos\theta_i \frac{\cosh k_i(h+z)}{\cosh k_i h} \sin\psi_i \tag{3.94}$$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)^{(1)} = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \sigma_i k_i \sin\theta_i \frac{\cosh k_i(h+z)}{\cosh k_i h} \sin\psi_i \tag{3.95}$$

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^{(1)} = -\sum_{i=1}^{\infty} b_i \sigma_i k_i \frac{\sinh k_i(h+z)}{\cosh k_i h} \cos\psi_i \tag{3.96}$$

여기서 $b_i \sigma_i = a_i g$ 이다. Second order 가속도는 두 개의 항으로 구성되어 있으며 각각을 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial t} = &-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j \frac{\cosh k_{ij}^{+}(h+z)}{\cosh k_{ij}^{+} h} D_{ij}^{+} \cos(\psi_i + \psi_j) \\ &-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j \frac{\cosh k_{ij}^{-}(h+z)}{\cosh k_{ij}^{-} h} D_{ij}^{-} \cos(\psi_i - \psi_j)\end{aligned} \tag{3.97}$$

$$\frac{1}{2}|\nabla\Phi^{(1)}|^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j k_i k_j E_{ij}^{+} \cos(\psi_i+\psi_j) + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j k_i k_j E_{ij}^{-} \cos(\psi_i-\psi_j) \tag{3.98}$$

$$E_{ij}^{+} = \frac{\cosh k_{ij}^{P}(h+z)(\cos\theta_{ij}^{-}-1) + \cosh k_{ij}^{M}(h+z)(\cos\theta_{ij}^{-}+1)}{\cosh k_{ij}^{P} h + \cosh k_{ij}^{M} h} \tag{3.99}$$

$$E_{ij}^{-} = \frac{\cosh k_{ij}^{P}(h+z)(\cos\theta_{ij}^{-}+1) + \cosh k_{ij}^{M}(h+z)(\cos\theta_{ij}^{-}-1)}{\cosh k_{ij}^{P}h + \cosh k_{ij}^{M}h} \tag{3.100}$$

따라서 식(3.97)과 식(3.98)을 식(3.92)에 대입하면 second order acceleration이 계산된다.

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^{(2)} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\Phi^{(1)}|^{2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j k_{ij}^{+}\cos\theta_{ij}^{P}\left[\frac{\cosh k_{ij}^{+}(h+z)}{\cosh k_{ij}^{+}h}D_{ij}^{+} + k_i k_j E_{ij}^{+}\right]\sin(\psi_i+\psi_j) \tag{3.101}$$

$$+ \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j k_{ij}^{-}\cos\theta_{ij}^{M}\left[\frac{\cosh k_{ij}^{-}(h+z)}{\cosh k_{ij}^{-}h}D_{ij}^{-} + k_i k_j E_{ij}^{-}\right]\sin(\psi_i-\psi_j)$$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)^{(2)} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\Phi^{(1)}|^{2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j k_{ij}^{+}\sin\theta_{ij}^{P}\left[\frac{\cosh k_{ij}^{+}(h+z)}{\cosh k_{ij}^{+}h}D_{ij}^{+} + k_i k_j E_{ij}^{+}\right]\sin(\psi_i+\psi_j) \tag{3.102}$$

$$+ \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j k_{ij}^{-}\sin\theta_{ij}^{M}\left[\frac{\cosh k_{ij}^{-}(h+z)}{\cosh k_{ij}^{-}h}D_{ij}^{-} + k_i k_j E_{ij}^{-}\right]\sin(\psi_i-\psi_j)$$

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^{(2)} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\Phi^{(1)}|^{2}\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j\left[k_{ij}^{+}\frac{\sinh k_{ij}^{+}(h+z)}{\cosh k_{ij}^{+}h}D_{ij}^{+} - k_i k_j F_{ij}^{+}\right]\cos(\psi_i+\psi_j) \tag{3.103}$$

$$- \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j\left[k_{ij}^{-}\frac{\sinh k_{ij}^{-}(h+z)}{\cosh k_{ij}^{-}h}D_{ij}^{-} - k_i k_j F_{ij}^{-}\right]\cos(\psi_i-\psi_j)$$

$$F_{ij}^{+} = \frac{\partial E_{ij}^{+}}{\partial z} = \frac{k_{ij}^{P}\sinh k_{ij}^{P}(h+z)(\cos\theta_{ij}^{-}-1) + k_{ij}^{M}\sinh k_{ij}^{M}(h+z)(\cos\theta_{ij}^{-}+1)}{\cosh k_{ij}^{P}h + \cosh k_{ij}^{M}h} \tag{3.104}$$

$$F_{ij}^{-} = \frac{\partial E_{ij}^{-}}{\partial z} = \frac{k_{ij}^{P}\sinh k_{ij}^{P}(h+z)(\cos\theta_{ij}^{-}+1) + k_{ij}^{M}\sinh k_{ij}^{M}(h+z)(\cos\theta_{ij}^{-}-1)}{\cosh k_{ij}^{P}h + \cosh k_{ij}^{M}h} \tag{3.105}$$

$$E_{ij}^{+} = E_{ji}^{+}, \quad E_{ij}^{-} = E_{ji}^{-}, \quad F_{ij}^{+} = F_{ji}^{+}, \quad F_{ij}^{-} = F_{ji}^{-} \tag{3.106}$$

제 4 장 연속형 모형

연속형 모형이란 파랑의 에너지가 파수와 주파수의 연속적인 값에서 정의되는 경우 제 1 계 성분의 상호작용에 의하여 생성되는 제 2 계 성분의 에너지 스펙트럼을 정식화(formulation)하는 것을 말한다. First order potential 식(3.17)은 파수 $\overrightarrow{k_n}$을 갖는 진행파의 속도포텐샬을 나타낸다. Laplce 방정식이 선형이므로 여러개의 파수가 합성된 파랑의 속도포텐샬은 각각의 포텐샬의 합으로 표현된다. 이 때 파수가 불연속적인 값을 갖지 않고 연속적인 분포를 하면 식(3.17)은 Fourier-Stieltjes 식으로 표현된다. 본 장에서는 연직하향을 z의 양의 방향으로 정의한다. 식(3.17)의 모든 파랑이 x 방향으로 진행하는 경우 Fourier-Stieltjes 적분은 다음과 같다.

$$\Phi^{(1)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(-kx+\sigma t)} \cosh k(z+h) d\zeta_1(\sigma) \tag{4.1}$$

식(4.1)을 식(3.15)에 대입하면 다음과 같다.

$$\eta^{(1)} = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma} e^{i(-kx+\sigma t)} k \sinh kh \, d\zeta_1(\sigma) \tag{4.2}$$

계산의 편의를 위하여

$$d\zeta_2(\sigma) \;=\; \frac{i}{\sigma} k \sinh kh \, d\zeta_1(\sigma) \tag{4.3}$$

이라 놓으면 식(4.1)과 식(4.2)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Phi^{(1)} = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(-kx+\sigma t)} \frac{i\sigma \cosh k(z-h)}{k \sinh kh} d\zeta_2(\sigma) \tag{4.4}$$

$$\eta^{(1)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(-kx+\sigma t)} d\zeta_2(\sigma) \tag{4.5}$$

식(4.4)와 식(4.5)를 식(3.12)에 대입하고 정리하면 second order 속도포텐샬에 대한 미분방정식을 얻는다.

$$\left[\frac{\partial^2\Phi^{(2)}}{\partial t^2} - g\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial z}\right]_{z=0} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} i\sigma\sigma' \; e^{i(-(k+k')x+\ (\sigma+\sigma')t\ )} d\zeta_2(\sigma) d\zeta(\sigma')$$
$$\left[-\frac{k\coth kh\coth k'h}{k'} - 2\coth kh\coth k'h\ \ +1+\frac{\sigma(\sigma'+\ \sigma)}{\sigma'^{\ 2}}\right] \tag{4.6}$$

저면경계조건 식(3.8)을 고려하면 식(4.6)을 만족시키는 $\Phi^{(2)}$를 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$\Phi^{(2)} = \int_{-\infty}^{infnt^{\infty}_{-\infty}} e^{i(-(k+k')x+\ (\sigma+\sigma')t\ )} G(\sigma,\sigma')\ \ \cosh(k+k')(z-h)\ \ d\zeta_2(\sigma)\, d\zeta_2(\sigma') \tag{4.7}$$

여기서 $G(\sigma,\sigma')$ 는 미정계수이다. 식(4.7)을 식(4.6)에 대입하여 미정계수 G를 구하면 다음과 같다.

$$G(\sigma,\sigma') = \frac{i\sigma\sigma'^{\ 2}\left[-\frac{k\coth kh\coth k'h}{k'} - 2\coth kh\coth k'h\ \ +1+\frac{\sigma(\sigma'+\sigma)}{\sigma'^{\ 2}}\right]}{-(\sigma+\sigma')^{\ 2}\cosh(k+k')h\ \ +g(k+k')\ \ \sinh(k+k')h} \tag{4.8}$$

한편 식(4.5)와 식(4.7)을 식(3.16)에 대입하면 수면변위를 얻을 수 있다.

$$\eta^{(2)} = \int_{-\infty}^{infnt^{\infty}_{-\infty}} e^{i(-(k+k')x+\ (\sigma+\sigma')t\ )} M(\sigma,\sigma')\ \ d\zeta_2(\sigma)\, d\zeta_2(\sigma') \tag{4.9}$$

$$M(\sigma,\sigma') = \frac{gkk'}{2\sigma\sigma'} + \frac{\sigma\sigma'}{2g} - \frac{(\sigma+\sigma')^2}{2g} + \frac{(\sigma+\sigma')^2\left[\frac{1}{2}\frac{g\sigma' k^2+g\sigma k'^2}{\sigma\sigma'(\sigma+\sigma')} + \frac{gkk'}{\sigma\sigma'} \frac{\sigma\sigma'}{2g} - \frac{(\sigma+\sigma')^2}{2g}\right]}{g|k+k'|\tanh|k+k'|h-(\sigma+\sigma')^2} \tag{4.10}$$

First order wave가 서로 독립이라고 가정하면 식(4.10)으로 부터 second order wave의 스펙트럼은 다음과 같이 된다.

$$S^{(2)}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\sigma,\lambda) S^{(1)}(\lambda-\sigma) S^{(1)}(\sigma)\, d\sigma \tag{4.11}$$

$$\lambda = \sigma + \sigma' \tag{4.12}$$

$$K(\sigma,\lambda) = \frac{1}{4}\left[\frac{gkk'}{\sigma(\lambda-\sigma)} + \frac{\sigma(\lambda-\sigma)}{g} - \frac{\lambda^2}{g} + \frac{\lambda^2\left\{\frac{g(\lambda-\sigma)k^2+g\sigma k'^2}{\sigma(\lambda-\sigma)\lambda} + \frac{2gkk'}{\sigma(\lambda-\sigma)} + \frac{\sigma(\lambda-\sigma)}{g} - \frac{\lambda^2}{g}\right\}}{g|k+k'|\tanh|k+k'|h - \lambda^2}\right]^2 \tag{4.13}$$

$$\sigma^2 = gk\tanh kh \tag{4.14}$$

$$(\lambda-\sigma)^2 = gk' \tanh k'h \tag{4.15}$$

식(4.11)이 first order 스펙트럼으로 부터 secondary interaction에 의한 생성되는 스펙트럼을 나타낸다. $K(\lambda,\sigma)$는 second order interaction의 핵함수(kernel function)이다. 식(4.11)은 해수면의 second order 스펙트럼이 핵함수가 도입된 first order 스펙트럼의 self-convolution으로 표현될 수 있음을 말해주고 있다. 한편 수면 변위와 스펙트럼과의 관계는 다음과 같다.

$$\langle \eta^{(1)^2} \rangle = \int S^{(1)}(\sigma)\, d\sigma \tag{4.16}$$

$$<\eta^{(2)^2}> = \int S^{(2)}(\lambda)d\lambda \qquad (4.17)$$

여기서 <>는 ensemble mean을 의미한다. 그러므로 평균해수면의 위치를 zero라 할 때 first order 스펙트럼의 면적은 해수면의 분산(variance)에 해당되며 second order 스펙트럼의 면적은 해수면의 왜도(skewness)에 해당된다.

Goda(1985)는 Costarica 해안에서 관측된 파랑 자료에 식(4.11)을 적용한 결과 고주파대와 저주파대의 에너지는 첨두 주파수대의 에너지가 상호작용한 결과로서 설명하고 있다. 즉 고주파대의 에너지 peak의 주파수는 대략 첨두 주파수의 2배로 나타나고 있는데 이로부터 고주파의 peak 부분은 첨두 주파수대의 에너지가 self-interaction한 것으로 해석할 수 있다.

제 5 장 결론 및 토의

본 연구에서는 해파의 2계 비선형 상호작용을 계산할 수 있는 기본식을 이산형과 연속형의 관점에서 유도하였다. 연속형 모형에서는 Fourier-Stieltjes 적분을 활용하여 2계 상호작용에 의한 표면파의 스펙트럼에 관하여 정식화(formulation)하였다. 2계의 에너지 스펙트럼은 선형파 이론에 근거한 1계 스펙트럼의 convloution으로 표현되었다. 2계 에너지 스펙트럼은 파랑의 관측 자료에서 흔히 나타나는 고주파와 저주파대의 에너지 분포를 잘 설명할 수 있기 때문에 기존의 파랑 분석 이론을 secondary interaction의 영향을 고려할 수 있도록 개선하는 것이 바람직하다고 사료된다.

이산형 모형에서는 수면 변위 뿐만아니라 속도포텐샬, 파랑에 의해 유도되는 압력, 수립자의 속도 및 가속도의 secondary interaction에 관하여 정식화하였다. 본 연구에서 제시된 이산형 모형은 Stokes의 second order wave theory를 일반화한 것이다. 특히 본 연구에서 제시된 2계 압력은 random wave가 연안 구조물에 미치는 파력 등을 정밀하게 계산할 때 유용하게 사용될 수 있다. 또한 파랑운동에 의하여 해저에서 발생되는 수립자의 속도를 2계 비선형항까지 계산할 수 있도록 하였으며 이는 연안의 토사이동 연구에 기여할 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

Chakrabarti, S. K. 1987. Hydrodynamics of affhore structures. CMP., NewYork

Chester, C. R. 1971. Techniques in partial differential equations. McGraw-Hill, N. Y.

Dean, R. G. and R. A. Darlymple 1984. Water wave mechanics for engineers and scientists. Prentice-Hall, N. J.

Goda, Y. 1985. Random seas and design of maritime structures. Univ. of Tokyo Press.

Horikawa, K. 1978. Coastal engineering. U. of Tokyo Press.

Ippen, A. T. 1966. Estuary and coastline hydrodynamics. McGraw-Hill, N. Y.

Kim, J. S. 1984. A study on the microseismic pressure due to directional spectrum. Thesis for degree of master of science, U. of Florida, Gainseville, Florida

Kinsman, B. 1965. Wind waves, their generation and propagation on the ocean surface. Prentice Hall, N. J.

Longuet-Higgins, M. S. and R. W. Stewart. 1962. Radiation stress and mass transport in gravity waves, with application to 'surf beat'. J. Fluid. Mech. Vol. 13

McGoldrick, L. F. 1965. Resonant interactions among capillary-gravity waves. J. Fluid Mech. Vol. 21.

Mei, C. C. 1983. The applied dynamics of ocean surface waves. John Wiley & Sons, NewYork

Sharma, J. N. 1979. Development and evaluation of a procedure for sumulating a random directional second order sea surface and associated wave force. Ph. D. dissertation, U. of Delaware, Newark

Stoker, J. J. 1957. Water waves. Interscience Publishers, Inc., N. Y.

Tick, L. J. 1963. Nolinear probability models of ocean waves, Ocean Wave Spectra, Prentice Hall.