

BSPE99256-10688-2

선형 산란파에 대한 계단형 근사법

Stepwise approximation for linear wave scattering

2014. 12. 30

한국해양과학기술원

제 출 문

한국해양과학기술원장 귀하

본 보고서를 “선형 산란파에 대한 계단형 근사법” 과제의 (최종)보고서로 제출합니다.

2014. 12. 31

총괄연구책임자 : 서 승 남

연구원 : 오 상 호

박 영 현

보고서 초록

과제고유 번호	PE 992256	해당단계 연구기간	2014.1.1 - 2014.12.31	단계 구분	최종보고
연구사업명	중사업명	주요사업			
	세부사업명	창의연구사업			
연구과제명	대과제명	Lab 창의과제			
	세부과제명	선형 산란파에 대한 계단형 근사법			
연구책임자	서승남	해당단계 참여연구원수	총 : 3 명 내부: 3 명 외부: 명	해당단계 연구비	정부: 85,000천원 기업: 천원 계 : 85,000천원
		총연구기간 참여연구원수	총 : 3 명 내부: 3 명 외부: 명	총 연구비	정부: 85,000천원 기업: 천원 계 : 85,000천원
연구기관명 및 소속부서명	한국해양과학기술원 연안공학연구본부		참여기업명	해당사항 없음	
국제공동연구					
위탁연구					
요약 (연구결과를 중심으로 개조식 500자 이내)				보고서 면수	63
<ul style="list-style-type: none"> ○ 파랑산란에 대한 억류과형을 포함하는 새로운 변환행렬의 제시 ○ 구성된 연립방정식을 단순한 방법으로 계산하는 기존의 방법으로는 계산할 수 없는 파랑산란의 실질적인 문제를 해결방법 제시 ○ 충분히 큰 연립방정식으로 구성된 산란문제를 정확하게 수치적으로 계산하고 기존 결과와 검증 ○ 본 모형의 계산의 뛰어난 효율성을 제시 ○ 미지수의 증가에 따른 반사율의 변화를 예시 					
색인어 (각 5개 이상)	한 글	파랑 산란; 계단 근사법; 변환행렬; 억류과형; 반사율			
	영 어	water wave scattering; stepwise approximation; transfer matrix; evanescent modes; reflection coefficient			

요 약 문

I. 제 목

선형 산란파에 대한 계단형 근사법

II. 연구개발의 목적 및 필요성

- 파랑은 해저지형에 의해 변형되며 지형이 급변하는 연안지역에서의 구조물 설계를 위해서는 파랑변형에 대한 예측이 선행되어야 하며, 적정한 설계를 위해 정밀한 예측 요구됨
- 해안에 존재하는 연안사주는 입사파의 주기에 따라 반사율을 달리하며 입사파장이 사주의 파장에 2배가 되면 에너지의 상당부분이 외해로 반사되는 Bragg 반사가 발생함
- 연안사주가 존재하는 지역에서 Bragg 반사를 일으키는 특정 입사파의 에너지는 해안에서 매우 작아서, 연안사주는 이들 입사파에 선별적인 해안 보호물로 작용함
- 해저지형을 계단지형으로 근사하여 고유함수 전개법으로 파랑변형을 계산하는 계단지형 근사법은 고유함수의 진행파와 역류파간의 연계를 고려할 수 있어 상당히 정밀한 기법으로 평가됨
- 해저지형이 복잡하고 경사가 급하면 역류파의 영향이 커지고, 이를 고려하기 위해 충분한 수의 역류파를 포함하여야 하나 이로 인한 연립방정식의 크기가 급격히 커져 기존 방법에는 상당한 제약이 존재함
- 구성 계단과 역류파의 개수에 의해 정해지는 미지수 개수에 따른 해의 수렴을 조사하기 위해 충분한 미지수를 사용할 수 있는 새로운 방법의 개발이 요구됨
- 다수의 계단지형에서는 단일 계단에서는 존재하지 않는 내부 계단간의 다중 반사로 인해 입사파에 따라 반사율이 변하고, 이에 포함된 물리적 의미를 Bragg 반사와 연관하여 해석하는 노력이 필요
- 다수의 계단으로 구성된 계단지형에 의한 파랑변화를 각 계단에 의한 변화의 합으로 나타낸다면, 각 계단이 전체 변형에 기여하는 정도를 알 수 있어 파랑변형 과정에 대한 이해의 폭 심화시킴

- 계단 지형으로부터 만들어진 연립방정식을 작은 크기의 여러 방정식으로 변환하여 계산하는 새로운 기법은 계산 효율성을 증대하고 기존에는 불가능한 계산을 가능하게 바꿈
- 자연재해로부터 안전하고 건강한 삶을 유지할 수 있는 제도적 장치를 보완하고 체계적인 과학기술을 활용하여 자연재해의 위해성을 충분히 알려 저감대책에 대한 국민적 공감대를 형성하여 안전한 사회를 구축

III. 연구개발의 내용 및 범위

- 정밀한 산란과 계산을 위해 진행파와 다수의 역류파로 고유함수를 구성하여 파형 간의 상호작용을 분석
- 계산계단 지형에서 고유함수로 전개한 속도 포텐셜의 진폭을 구하기 위해 계단 내부경계에서의 정합조건으로부터 연립방정식 구성
- 계산계단 지형의 모든 구성 계단에 대한 산란행렬을 이용한 전체 계단지형에 대한 전환행렬 유도
- 분석구성 계단과 사용 파형의 개수 증가에 따른 해의 수렴도와 정밀도 분석

IV. 연구개발결과

- 수십이 일정하지 않은 지형을 다수의 계단으로 근사적으로 구성하기 때문에 계단의 개수가 많을수록 지형이 정확히 재현됨
- 지형이 복잡하거나, 해저 경사가 급하면 지형에 의해 다수의 역류파가 생성되고 역류파형의 수가 증가하면 엄밀해로 수렴
- 본 연구에서는 기존 결과보다 훨씬 많은 미지수를 사용하고자 하며, 이를 위해 역류파형을 포함한 새로운 변환 행렬법을 도입하여 파랑의 변형을 효율적으로 계산
- 구성된 연립방정식을 단순한 방법으로 계산하는 기존의 방법으로는 계산할 수 없는 파랑산란의 실질적인 문제를 해결할 수 있음을 입증
- 충분히 큰 연립방정식으로 구성된 산란문제를 매우 정확하게 수치적으로 계산하는 방법을 제시
- 본 모형의 계산의 뛰어난 효율성을 제시하고 미지수의 증가에 따른 반사율의 변화

를 예시

V. 연구개발결과의 활용계획

- 지형에 의한 반사율 계산의 정밀도를 제고하여 연안재해 방지와 연안보전을 위한 연안구조물의 설계파랑 산정
- 수심 급변지형에 대한 conformal mapping을 이용하여 일정한 폭의 수층으로 변환하기 위한 해석함수 유도하고 변환좌표계에서 계단근사법을 이용하여 주어진 문제의 해를 구한 뒤 이를 다시 역변환하여 물리좌표계에서 속도포텐셜과 유속장을 정밀하게 계산
- conformal mapping에 의해 구한 해저면의 유속을 바닥 경계층의 상층 유속으로 사용하여 바닥경계층의 물질전달속도를 계산하고 이로부터 해저변동을 계산하는데 활용
- 파랑의 지형 간에 상호작용을 응용하여 파랑과 연안사주의 상호작용이 해안방호에 미치는 영향과 기능을 분석
- 파랑조건의 변화에 따른 연안사주의 형성과 변화과정 해석
- 본 모형을 외력이 작용하는 경우로 확장하여 계단 지형 위를 지나는 이동성 기압에 의해 생성되는 파랑변형

S U M M A R Y AND KEYWORDS

For a two-dimensional linear wave scattering problem, a new transfer matrix incorporating evanescent modes is developed, from which the solution of a scattered wave field over a stepwise topography is directly obtained. The present method is shown to be capable of solving practical scattering problems with complicated bedforms, for which application of the conventional methods has been fairly limited. Highly accurate numerical solutions for sufficiently large systems are presented, and the computational efficiency of the present method is demonstrated. The interaction of bars in periodic beds is examined, and changes in the reflection coefficient with increasing number of bars are illustrated

KEYWORDS :

파랑 산란; 계단 근사법; 변환행렬; 역류파형; 반사율

water wave scattering; stepwise approximation; transfer matrix; evanescent modes; reflection coefficient

제 1 장 서론

모래 해안에 형성되어 있는 연안사주는 단독으로 존재하기 보다는 다수의 사주가 군집체를 이룬 형태로 존재한다. 모래로 이루어진 연안사주는 파랑 조건에 따라 개개의 위치가 변할 수 있다. 또한 폭풍이 동반한 큰 파고의 파랑은 해안사구의 모래를 외해로 이동하여 새로운 연안사주를 생성함과 동시에 쇄파대의 폭을 넓혀 여러 번의 쇄파를 일으켜 파랑에너지를 급속히 감쇄한다. 결국 이렇게 형성된 연안사주는 파랑에너지를 효과적으로 흡수하는 기능이 있어 배후 해안을 보호하는 중요한 역할을 한다.

모래 해안에 연안사주의 형성은 어떻게 시작되고 어떠한 과정에 의해 군집체로 발전하는 가는 연안과정(coastal process)을 이해하는 데 매우 중요하다. 우선 연안사주의 형성에 대한 질문에 답하기 위해서는 모래의 이동과 이에 의한 지형의 변형 그리고 이로 인한 파랑의 변형을 동시에 고려하여야 한다. 그러나 파랑과 모래이동의 상호작용에 대한 매우 복잡하고도 어려워 기술적으로 극복해야 할 난제가 많다. 따라서 현 기술로는 연안사주 변형과정 전체를 이해할 수는 없지만, 연안사주의 지형이 주어진 특수한 경우에 대한 파랑 변형의 재현이라도 연안과정의 이해에 부분적인 도움이 된다.

앞에 기술한 내용을 요약하면 해안사구에 있는 다량의 모래가 폭풍시 연안으로 이동하여 연안사주를 형성하고, 쇄파대의 폭을 넓혀 내습파랑의 에너지를 감소시켜 해안을 보호하는 자연의 순기능에 대한 이해는 연안보전을 위한 기술의 핵심으로 관련 연구개발이 필요하다. 축적된 과학기술을 활용하여 자연재해의 위해성을 충분히 알림으로써 국민들이 자연재해로부터 안전하고 건강한 삶을 유지할 수 있는 제도적 장치를 보완하고 자연재해 저감대책에 대한 국민의 공감대를 형성함으로써 재해에 강하고 안전한 사회를 구축할 수 있다. 또한 연안지형의 순작용과 지역별 특성을 홍보하여 연안보전에 대한 지역민의 자발적인 참여를 유도하여 건강하고 재해로부터 안전한 연안을 조성하여 주민의 삶의 질을 높이고 연안의 독특한 환경과 어우러지는 문화·여가 상품을 개발하여 지역의 인지도를 제고할 수 있다.

해안지역의 관광증대는 지역의 경제·산업적 가치를 증가시키는 주요 요소임에는 분명하나 이는 지속 가능한 개발의 구도에서만 이루어져야 소기의 목적을 달성할 수 있다.

최근 무분별한 해안개발 특히 해안선에 접한 해안도로의 건설은 해안침식의 원인으로 지적되었고, 이상 기후변화로 인한 해수면의 상승과 폭풍강도의 증가는 해안침식의 기존의 범위를 크게 확대시키고 있다. 그래서 이를 제어하기 위해 설치한 호안 구조물의 기능을 저하시키거나 또는 마비시켜 구조물 복구에 상당한 비용이 들고 지역경제를 위축시키게 된다. 해안침식은 종종 경관의 손괴를 동반하며 손괴된 경관을 복구할 수 없는 경우도 있어 경관보호에 세심한 주의가 요구된다. 결국 해안침식 효과적으로 방지하기 위해서는 연안과정에 대한 충분한 과학적 이해가 요구되며 이를 예측에 활용하여 연안침식과 범람 등의 피해로부터 지역 주민을 안전하게 보호하고 경제활동을 원활하게 촉진하기 위하여 파랑과 모래지형의 상호작용에 대한 과학적 탐구가 지속되어야 한다.

자연재해로부터 안전하고 건강한 삶을 유지할 수 있는 제도적 장치를 보완하고 체계적인 과학기술을 활용하여 자연재해의 위해성을 충분히 알림으로써 저감대책에 대한 국민적 공감대를 형성하여 안전한 사회를 구축하여야 한다. 특히 잘 못된 예보는 예보의 신뢰도를 낮출 뿐만 아니라 이에 따른 지역민을 불필요하게 대비하게 함으로써 과학기술에 대한 사회적 반감을 형성한다. 그리고 반복된 오보는 예보에 대한 불신까지도 이르게 할 수 있으므로 예보의 정확성 향상을 위한 꾸준한 기술개발이 요구된다.

본 연구에서는 주어진 지형을 다수의 구간으로 나누어 이를 계단형태의 지형으로 근사한 후 지형에 의해 산란되어 형성되는 파랑의 정밀한 계산을 위해 진행파와 다수의 역류파로 고유함수를 구성하여 파형간의 상호작용을 분석한다. 주어진 문제의 해를 구하기 위해 계단 지형에서 고유함수로 전개하고 미지수인 속도포텐셜의 진폭을 구하기 위해 계단 내부경계에서의 정합조건으로부터 연립방정식 구성한다. 이 때 유도된 연립방정식을 신속하게 계산하기 위해 주어진 지형의 모든 구성 계단에 대한 개별 산란행렬을 이용한 전체 계단지형에 대한 전환행렬 유도한다. 그리고 구성 계단과 사용 파형의 개수 증가에 따른 해의 수렴도와 정밀도 분석하여 기존 결과와 비교한다.

제 2 장 기술개발 현황

2.1 국외연구

수심이 변하는 지형 위를 지나는 파랑은 수심 변화에 따른 파랑분산식을 만족해야 하기 때문에 파장이 바뀌게 된다. 이는 군속도의 변화를 야기시켜 마찰에 의한 파랑 에너지 감쇄를 무시할 수 있는 경우 파고의 변화로 나타난다. 지형에 의한 파랑의 변화를 계산하기 위해 지형을 다수의 계단으로 근사하고 수심이 일정한 개개의 계단에서 해를 구성한 뒤 계단지형에 의해 형성된 수심 불연속인 곳에서 인접 계단의 해를 정합하는 기법이 사용되어 왔으며 이는 정밀도가 높은 것으로 평가된다.

단일 계단은 두 개의 일정한 수심이 한 점에서 만나 이 점에서는 수심이 불연속한 단조로운 지형으로, 수심이 일정한 구역에서 해를 고유함수로 각각 전개한 후 수심 불연속선에서 정합조건을 사용하여 미지수인 고유함수의 진폭을 구한다. Miles (1967)는 단일 계단의 파랑변형을 변분근사법을 이용하여 구하였고, Mei와 Balck (1969)은 직사각형 물체가 일정한 수심에 착저한 형태인 Sill 지형과 수면에 부유상태로 고정된 경우에 대해 변분근사법을 사용하였다.

Kirby and Dalrymple (1983)은 폭이 일정한 직선 Trench에 의한 평면 2차원 입사파의 변형을 구하기 위해 Takano (1960)의 고유함수 전개법을 적용하였으며, 역류과 개수의 증가에 따라 해가 수렴하는 것을 보였다. Devillard et al. (1988)은 계단지형 파랑 변형의 계산량을 줄이기 위해 Miles (1967)의 변분근사법과 Srokosz and Evans (1979)의 wide-spacing 근사법을 사용하여 구성 계단의 진행과로만 이루어진 변형행렬을 고안하였다. Devillard et al.은 불규칙한 지형 위를 지나는 평면파가 완전 반사되는 거리인 Anderson localization은 주어진 입사파장의 함수가 되며 이를 보이기 위해 각 구성 계단의 변형행렬을 순차적으로 곱해 계산하는 방법을 사용하였다.

계단지형에서 형성되는 파랑은 진행과에 이외에도 수심 불연속점에서 발생하는 역류과형이 존재하게 된다. 이는 계단의 수심 불연속 좌우에 생성된 진행과의 차이를 없애 매끄러운 형태의 속도포텐셜을 만들게 되며 지수적인 감소를 보인다. 따라서 어느 정도 거리가 떨어지면 이 과형들의 영향이 소멸되며 wide-spacing 근사법은 이러한 특성을

이용한 방법으로 결국 wide-spacing 근사법이 성립하기 위해서는 모든 계단선반의 길이가 길어 생성되는 역류파가 인접 계단에 영향을 주지 않은 특수한 제약을 받게 된다. 그러나 이 경우 역류파와 진행파의 연계는 각 계단의 수심이 일정한 구간에서만 이루어져 계산이 매우 빠르기 때문에 많은 계단으로 구성된 지형에도 적용이 가능하다.

O' Hare and Davies (1992)는 Devillard et al.의 방법을 동일한 정현파만으로 구성된 사주지형에 적용하여 수치실험과 거의 일치하는 결과를 보였다. 또한 수심이 불연속한 계단에서의 수심차이 즉 계단높이가 수심에 0.02배 이하가 되도록 다수의 많은 계단을 사용하면 wide-spacing 근사법의 결과가 계산이 용이한 평면과 근사법의 결과와 사실상 동일함도 밝혔다.

그러나 지형의 경사가 급하거나 복잡한 경우에는 비록 많은 계단을 사용한다 해도 평면과 근사식의 결과는 수치실험과 상당한 차이 (O' Hare and Davies, 1993)를 보이며, 이를 보완하기 위해서는 모든 계단에서 진행파와 역류파가 연계된 방법을 사용해야 함을 Guazzelli et al. (1992)이 지적하였다.

저면에 수직벽 하나가 설치된 특수한 지형과 같이 계단 근사가 불가능한 경우 conformal mapping을 사용하여 주어진 수역을 일정한 폭의 영역으로 변환하고 여기에 계단 근사법으로 파랑변형을 계산한 후 이를 다시 역변환하는 기법을 Evans and Linton (1994)이 보였다. 그들은 이 결과가 매우 정밀함을 다른 정밀 기법의 결과와 비교하여 입증하였다.

모든 파형이 연계된 방법은 구성 계단과 파형의 수를 늘리면 연립방정식의 크기가 급격히 커져 많은 계산이 필요하기 때문에, 기존의 방법은 미지수 크기에 제약이 있으며 계산이 불가능하거나 실용성이 떨어진다. 두 개의 정현파로 구성된 복잡한 사주에 비록 적은 개수의 역류파를 사용하므로써 미지수의 개수를 줄여 계산한 결과는 수치실험과 일치한다 (Mattioli 1991; Guazzelli et al. 1992). 지형을 구성하는 정현파의 형태가 상이한 경우 다수의 Bragg 반사(최대 증폭)를 보이게 되며 파형의 연계를 고려한 경우에는 최대 반사율의 위치가 장주기 방향으로 이동하고, 기존 결과에서 볼 수 없던 제2 증폭도 발생하며 이는 수치실험의 결과와 같음을 보였다. 특히 위의 복잡한 사주지형에서 2개의 구성 정현파의 파장이 상이한 경우 파장 차이로부터 생성되는 2차 증폭도 상당히 크며

모든 파형이 연계된 방법으로만 이 현상이 재현된다.

Guazzelli et al. (1992)은 계산량을 줄이기 위해 구성 계단을 여러 개로 그룹으로 나누어 각각의 그룹 내에서는 모든 파형을 연계하여 계산하였으나, 그룹 간에는 wide-spacing 근사법을 사용하는 혼합 근사법 사용하였다. 따라서 이는 엄밀한 의미의 파형 연계법은 아니기 때문에 훨씬 복잡한 지형의 경우에는 그들의 결과에 뚜렷한 차이가 발생할 수도 있다.

현재까지 가장 많은 미지수를 사용한 계단 근사법으로는 Cho and Lee (2000)가 지형의 정현파장 당 200개의 계단과 최대 4개의 역류파를 사용한 사례이다. 또한 역류파 개수는 미지수를 거의 2배 증가시키기 때문에 비교적 작은 개수를 사용하였다. 결국 계산을 정밀하게 하기 위해서는 미지수를 늘려야 하나 연립방정식이 급격히 커지기 때문에 계산상의 제약을 있으며 이를 보완하기 위한 여러 방안들이 제시되었다. 동일 기법 가운데 가장 많은 미지수를 허용하기 위해 모든 파형을 연계법을 사용하고 이 때 구성되는 연립방정식을 재편하여 변환행렬로 만들어 기존에는 불가능한 경우로 확장하고자 한다.

수심이 변하는 지형을 계단지형으로 근사하여 파랑을 구하는 경우 해면변위는 정확하나 저면으로 갈수록 정밀도가 떨어질 것으로 예상된다. 특히 계단지형 근사의 경우에는 실제 해저면의 경계조건인 no-flux 조건을 만족하지 않는 단점이 있다. 또 다른 특이한 지형인 일정 수심에 설치된 수중 수직판의 경우에는 판의 두께가 무시할 정도로 얇은 특수한 경우에는 위의 계단지형 근사법을 사용할 수 없다.

해저면의 수심이 변하나 특이한 형태가 되면 conformal mapping을 이용하여 변환좌표계에서 일정한 폭을 갖는 수층으로 바꿀 수 있다. 이 때 변수심의 해저면과 해면은 변환좌표계에서 각각 직선이 되기 때문에 해저면 경계조건은 바뀌지 않고 동일하게 된다. 그러나 해면조건은 mapping에 의해 변하게 되며 일차 미분식의 계수가 일반적으로는 연속함수로 바뀐다. 이 연속함수를 다수의 구간으로 나누고 이 각각의 구간에서는 해면조건이 일정한 값으로 근사하여 각 구간 경계에서 정합조건을 사용한다. 그리고 주어진 지형에 대한 속도포텐셜을 구하고 이를 역변환하여 실제 지형에서의 속도포텐셜을 구한다. 이 방법은 Evans and Linton (1994)가 제시하였다.

기존 결과와의 비교를 통해 Evans and Linton의 방법으로 계산한 반사율이 매우 정

확함을 검증하였다. 그러나 Evans and Linton은 반사율에 대한 결과만을 나타내었고 유속장은 제시하지 않아 수층 내부의 구체적인 내용이 포함되지 않았다. 유속장의 계산은 수층 내부의 속도포텐셜 계산과 mapping에 따른 변수변환의 계산과정이 필요하여 복잡하다. 따라서 이에 대한 후속 연구가 필요하며 이는 지형변화에 대한 해저면의 유속 변화를 보임과 동시에 바닥 boundary layer 연구에 입력자료로 사용되어 퇴적물 이동에 필수적인 정보를 제공한다.

위에 기술한 바와 같이 고정 형태의 연안사주는 입사파랑의 특성에 따라 반사율이 정해지고, 사주 간격의 2배의 입사파랑의 경우 연안사주에 의한 최대 Bragg반사를 발생하며, 해안선 부근에 위치한 연안사주의 경우 사주를 통과한 파랑이 해안에서의 재반사 과정을 겪게 되어 이에 따른 파랑과 지형의 변화 연구도 필요하다.

최근 Bender와 Dean (2003)은 2차원 직벽 Trench와 사면 Trench에 의한 파랑변형을 분석하기 위해 계단근사법을 이용하였다. 그들은 사면의 역할에 초점을 맞추어 사면의 경사가 완만할수록 반사율이 감소하는 것을 보였다. 계단근사로 계산한 결과는 다른 천해모형의 결과와 일치하였고 이 가운데 계단근사법이 보다 정확하게 결과를 산출하는 것으로 평가하였다.

2.2 국내연구

Trench 지형에서 수심과 해류가 각각 불연속하게 변하는 경우에 사각 입사파에 의해 생성되는 역류파의 영향을 조사하기 위해 서와 전 (1992)은 Kirby et al. (1987)의 방법을 사용하여 전반사가 발생하는 조건에서 Trench 폭에 따른 파형변위를 나타내었다. 사각입사의 경우 비록 전반사가 발생해도 Trench 폭이 좁아 생성된 역류파형이 완전히 감쇄되지 않으면 Trench 밖의 투과지역에서 진행파가 형성되는 특이함이 보이게 된다.

조와 이 (1998)는 정현파의 연안사주와 반원 지형에 의한 파랑변형을 검토하기 위해 Kirby and Dalrymple (1983) 방법을 이용하여 최대 4개의 역류파를 사용하였고 기존 반사율과 유사한 결과 얻었다.

서 (2008a)는 단일 계단지형에 대한 반사파와 투과파의 해를 이용하여 다중 계단지형에서의 파랑변형을 계산할 수 있는 산란체법을 제시하였고 이를 보다 정밀한 Kirby and Dalrymple(1983)의 해와 비교하였다. 계단지형을 이용한 선형과 변형계산에서 변분 근사식과 연계된 서 (2008b)의 산란체법은 O'Hare and Davies (1992)의 변환행렬 축차법보다 간단하고 직접적인 방법임을 보였다.

단일 계단지형에 대한 선형 파랑의 변형에 변분근사법과 고유함수 전개법을 비교한 서 (2009a)는 해면변위는 거의 일치하나 파랑의 주 진행 방향의 계산 유속의 수직구조에서는 차이가 있음을 보였다.

계단 근사법에 의해 형성된 연립방정식을 풀 때 계산시간을 단축하기 위한 분할행렬법을 제시한 서 (2009b)는 역류파 10개를 사용하여 발표 당시까지 가장 정밀한 수치해 생산하였다. 평면파 근사식에 기초한 산란체법과 변환행렬법을 비교하여 산란체법의 결과가 기존 엄밀해에 보다 가까우며 내재한 물리현상을 보다 명확하게 설명할 수 있음을 서 (2010)가 보였다.

제 3 장 계단근사 지형의 파랑변형

수심이 변하는 지형 위를 지나는 파랑은 수심의 변화로 인해 파장이 변하게 되며 이로 인해 파속과 군속도의 변화를 가져온다. 이는 파랑에너지를 재편시켜 파고가 변하게 된다. 본 연구에서는 지형에 의한 파랑변형을 비교적 단순한 경우에 대해 다루고자 저면 마찰손실을 없는 선형파를 대상으로 한다. 이러한 조건에서는 파랑은 Laplace 방정식을 만족하는 속도포텐셜 $\phi(x, z)$ 로 나타낼 수 있고 2차원 경계치 문제는 (3.1)로 주어진다.

$$\begin{aligned} \phi_{xx} + \phi_{zz} &= 0, & -h(x) < z < 0 \\ \phi_z + \phi_x h_x &= 0, & z = -h(x) \\ \phi_z - \frac{\omega^2}{g} \phi &= 0, & z = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

여기서 x 축은 파랑의 진행방향이고 z 축은 연직방향으로 $z = -h(x)$ 는 해저면이며, 좌표계의 원점은 정지수면에 위치한다. 단주기 파랑을 대상으로 각주파수 ω 는 $\omega = 2\pi/T$ 로 정의되며 T 는 주기이다. 또한 수심, 주기와 진행파의 파수 $k_0 = 2\pi/L$ 는 파랑분산식 (3.2)를 만족한다. 그리고 역류파의 파수 k_j 는 무한개로 (3.2)로 주어진다.

$$\omega^2 = gk_0 \tanh k_0 h_i = -gk_j \tan k_j h_i. \tag{3.2}$$

파랑의 주기가 주어지면 (3.2)는 파수에 관한 비선형식으로 반복법을 사용하여 정할 수 있다.

수심이 일정한 $h_x = 0$ 경우 (3.1)은 (3.3)이 된다.

$$\begin{aligned} \phi_{xx} + \phi_{zz} &= 0, & -h_i < z < 0 \\ \phi_z &= 0, & z = -h_i \\ \phi_z - \frac{\omega^2}{g} \phi &= 0, & z = 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

(3.3)의 해는 변수분리법으로 구할 수 있고 연직방향 성분은 고유함수 $f_{i,j}(z)$ 로 나타낼 수 있다.

$$\phi_i = \left(p_i^+ e^{ik_{i,0}x} + p_i^- e^{-ik_{i,0}x} \right) f_{i,0}(z) + \sum_{j=1}^{\infty} \left[s_{i,j}^+ e^{-k_{i,j}(x-x_{i-1})} + s_{i,j}^- e^{k_{i,j}(x_i-x)} \right] f_{i,j}(z) \quad (3.4)$$

여기서

$$f_{i,j}(z) = \begin{cases} \cosh k_{i,0}(z+h_i), & j=0 \\ \cos k_{i,j}(z+h_i), & j \geq 1 \end{cases} \quad (3.5)$$

식 (3.4)에서 p_i^\pm 는 진행파의 미지 진폭이고 $s_{i,j}^\pm$ 는 역류파의 진폭이다.

수심이 변하는 지형을 다수의 계단으로 근사하여 속도포텐셜을 구하는 경우 (3.4)의 미지 진폭은 수심 불연속선에서 정합조건으로부터 구하고 계단의 좌우외측에는 방사조건과 입사조건이 부여된다. 불연속선 i 에서 정합조건은 (3.6)이 된다.

$$\begin{cases} \phi_i = \phi_{i+1} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial x} = \frac{\partial \phi_{i+1}}{\partial x}; \quad x = x_i, \quad -\min(h_i, h_{i+1}) \leq z \leq 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

연직벽에서 수평유속은 $\partial \phi / \partial x = 0$ 이 되어야 하기 때문에 (3.6)은 계단의 수심이 낮은 수층에서만 성립한다. 첫 식은 경계선에서 압력이 같음을 나타내는 동력학 조건이고 둘째 식은 유속이 동일한 즉 물질보존식이다.

미지 진폭을 구하기 위해 (3.4)의 역류파의 개수를 N 로 절단하면 절단으로 인한 오차가 발생하며 가중잔차법(weighted residual method)의 하나인 Galerkin 기법을 사용한다. Kirby and Dalrymple (1983)의 연구에 따르면 경계선 $x = x_i$ 에 정합조건은 (3.7)이 된다.

$$\begin{cases} \int_{-h_s}^0 \phi_i f_{i,j}^s dz = \int_{-h_s}^0 \phi_{i+1} f_{i,j}^s dz \\ \int_{-h_i}^0 \frac{\partial \phi_i}{\partial x} f_{i,j}^d dz = \int_{-h_{i+1}}^0 \frac{\partial \phi_{i+1}}{\partial x} f_{i,j}^d dz \end{cases}; \quad x = x_i, \quad h_s \equiv \min(h_i, h_{i+1}), \quad (3.7)$$

여기서 h_s 는 정의한 바와 같이 인접 두 계단바닥 수심 가운데 낮은 수심이며 정력학 정합조건에서 연직벽의 수평유속이 0인 점을 이용하여 적분하한을 전체 바닥수심으로 확장한 것이다. 고유함수 $f_{i,j}^s$ 는 바닥수심이 낮은 지역에 대한 것이고 $f_{i,j}^d$ 는 바닥수심이 깊

은 지역의 고유함수로 (3.7)로부터 얻게 되는 연립방정식은 수치계산상 안정성이 높은 장점이 있다.

경계선 $x = x_i$ 에서 정합조건과 Galerkin 기법을 사용하여 (3.7)로부터 얻는 연립방정식의 미지 진폭을 벡터 \mathbf{X}_i 는 $2(N+1)$ 개의 원소로 구성되며 이를 다시 두 개의 $(N+1)$ 벡터로 재편하여 이를 (3.8)로 정의한다.

$$\mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} X_i^- \\ X_{i+1}^+ \end{bmatrix}, \quad X_i^\pm = \{p_i^\pm, s_{i,1}^\pm, \dots, s_{i,N}^\pm\}^T. \quad (3.8)$$

그러면 (3.7)로부터 얻어지는 연립방정식은 (3.9)과 같은 행렬식으로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{A}_i \mathbf{X}_{i-1} + \mathbf{B}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{C}_i \mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{0}, \quad (3.9)$$

여기서 행렬 \mathbf{A}_i , \mathbf{B}_i 와 \mathbf{C}_i 는 각각 $(N+1)$ 요소를 갖는 4개의 정방행렬을 요소로 갖는 sub-matrices로 (3.10)으로 정의한다. 주목해야 할 점은 행렬 \mathbf{A}_i 와 \mathbf{C}_i 는 구성요소 0 행렬을 가진 sparse matrix로 해를 구하기 위해 단순한 direct inverse 기법을 사용하면 불필요한 기억용량과 많은 계산시간이 들게 된다.

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_{i,12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{i,22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{i,11} & \mathbf{B}_{i,12} \\ \mathbf{B}_{i,21} & \mathbf{B}_{i,22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{i,11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{i,21} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

특히 계단의 개수 M 이 증가하면 정한 역류파의 수 N 을 곱한 $2M(N+1)$ 만큼의 미지수가 생겨 계산시간은 지수적으로 증가한다. 그래서 O' Hare and Davies (1993)는 역류파를 무시한 진행파만을 사용하여 계산시간을 줄이는 것이 현실적인 대안이라 지적하였다.

그러나 (3.9)가 내재한 특성인 sparse matrix를 효과적으로 이용하면 다수의 역류파를 포함하더라도 계산시간을 크게 줄일 수 있으며 본 연구에서는 이를 보이고자 한다. 이 연구에서는 계산시간을 줄이기 위해 또 다른 근사기법을 도입하지 않고 주어진 식을 변형하여 원래 주어진 식을 빠르고 정확하게 계산하고자 한다.

유도된 (3.9)를 풀면 속도포텐셜의 진폭을 구하게 되고 이를 (3.4)에 대입하면 포텐셜이 구해진다. 해면을 구하기 위해서는 동력학 해면조건이 필요하고 이로부터 투과파와

반사파의 진폭이 계산된다. 그리고 물리적으로 관심대상인 반사율 K_R 과 투과율을 속도 포텐셜 정의 (3.4)에 의해 (3.11)로 표현된다. 이 매개변수는 입사파의 진폭과 지형에 의한 반사파와 투과파의 진폭의 비로 지형에 의한 산란도를 나타낸다.

$$K_R = \frac{|p_1^-|}{|p_1^+|}, \quad K_T = \frac{|p_{M+1}^+|}{|p_1^+|} \frac{\cosh k_{M+1} h_{M+1}}{\cosh k_1 h_1}. \quad (3.11)$$

이제 본 연구의 핵심주제인 변형행렬에 대해 기술하기로 한다. 이는 앞에서 기술한 바와 같이 수치적인 계산의 정밀도는 유지하되 기억용량과 계산속도의 현저히 높이는 방법으로 유도된 연립 방정식의 특성을 고려하여 주어진 식을 적절히 변형하여 해를 새로운 변형행렬로 나타내는 방법에 관한 것이다.

3.1 단일계단

기존의 연구에서는 계단의 선반길이가 무한하여 입사파가 $x \rightarrow \pm\infty$ 에서부터 계단으로 접근하며 따라서 계단부근에서 역류파는 완전히 감쇄되어 진행파만 존재하게 된다. 그러나 본 연구에서는 계단 선반의 길이가 작아 입사파에 역류파형이 존재하는 것으로 확장한다. 이 조건은 기존의 결과를 확대한 것일 뿐 아니라 본 연구에서 추구하는 기법에서도 필요하기 때문이다.

하나의 계단에 대한 연립방정식은 (3.9)로부터 얻을 수 있고 이를 (3.12)로 변환한다.

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{X}_1 = \mathbf{D}_1 \tilde{\mathbf{X}}_1 \equiv \mathbf{X}_1^{\text{in}}, \quad (3.12)$$

여기서

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1,11} & \mathbf{B}_{1,12} \\ \mathbf{B}_{1,21} & \mathbf{B}_{1,22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_1 = - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,12} & \mathbf{C}_{1,11} \\ \mathbf{A}_{1,22} & \mathbf{C}_{1,21} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_1 = \begin{Bmatrix} X_1^- \\ X_2^+ \end{Bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{X}}_1 = \begin{Bmatrix} X_1^+ \\ X_2^- \end{Bmatrix}. \quad (3.13)$$

(3.12)는 (3.9)의 일부를 이항하여 입사파와 산란파를 분리하여 재구성한 것으로 행렬 \mathbf{A}_1 와 \mathbf{C}_1 의 일부 구성요소가 0 행렬인 점을 이용하여 입사파의 진폭 $\tilde{\mathbf{X}}_1$ 와 연관된 행렬 \mathbf{D}_1 의 곱이 입사파 조건으로 나타낸 것이다. (3.13)의 미지수는 반사파 진폭 X_1^- 과 투과파 X_2^+ 인 반면에 입사파는 양측 계단선반에 존재하는 파랑성분 가운데 경계선 쪽으로 향하는 성분들의 진폭과 선반의 길이와 입사파의 특성이 반영된 것이다.

행렬 \mathbf{B}_1 와 \mathbf{D}_1 는 수심과 선반길이가 같은 지형조건과 입사파가 주어지면 앞에 기술한 고유함수의 내적 또는 Galerkin 기법 (3.7)로부터 계산한다. $h_1 < h_2$ 의 경우에 대한 예를 들어 설명하면 정력학 정합조건으로부터 (3.14)가 얻어진다. 여기서 행렬요소의 첨자는 $(m=1, \dots, N+1)$ 으로 $N+1$ 개의 식이 얻어진다.

$$b_{m,n} = \begin{cases} -ik_{1,0} e^{-ik_{1,0}x_1} \int_{-h_1}^0 f_{1,0} f_{2,\bar{m}} dz, \\ k_{1,j} \int_{-h_1}^0 f_{1,j} f_{2,\bar{m}} dz, \\ -ik_{2,0} e^{ik_{2,0}x_1} \int_{-h_2}^0 f_{2,0} f_{2,\bar{m}} dz, \\ k_{2,j} \int_{-h_2}^0 f_{2,j} f_{2,\bar{m}} dz, \end{cases} \quad d_{m,n} = \begin{cases} -ik_{1,0} e^{ik_{1,0}x_1} \int_{-h_1}^0 f_{1,0} f_{2,\bar{m}} dz & (n=1), \\ k_{1,j} e^{-k_{1,j}\Delta x_1} \int_{-h_1}^0 f_{1,j} f_{2,\bar{m}} dz & (n=j+1), \\ -ik_{2,0} e^{-ik_{2,0}x_1} \int_{-h_2}^0 f_{2,0} f_{2,\bar{m}} dz & (n=N+2), \\ k_{2,j} e^{-k_{2,j}\Delta x_2} \int_{-h_2}^0 f_{2,j} f_{2,\bar{m}} dz & (n=j+N+2). \end{cases} \quad (3.14)$$

그리고 동력학 정합조건($m=N+2, \dots, 2N+2$)으로부터 (3.15)가 형성된다.

$$b_{m,n} = \begin{cases} e^{-ik_{1,0}x_1} \int_{-h_1}^0 f_{1,0} f_{1,\bar{m}} dz, \\ \int_{-h_1}^0 f_{1,j} f_{1,\bar{m}} dz, \\ -e^{ik_{2,0}x_1} \int_{-h_1}^0 f_{2,0} f_{1,\bar{m}} dz, \\ -\int_{-h_1}^0 f_{2,j} f_{1,\bar{m}} dz, \end{cases} \quad d_{m,n} = \begin{cases} -e^{ik_{1,0}x_1} \int_{-h_1}^0 f_{1,0} f_{1,\bar{m}} dz & (n=1), \\ -e^{-k_{1,j}\Delta x_1} \int_{-h_1}^0 f_{1,j} f_{1,\bar{m}} dz & (n=j+1), \\ e^{-ik_{2,0}x_1} \int_{-h_1}^0 f_{2,0} f_{1,\bar{m}} dz & (n=N+2), \\ e^{-k_{2,j}\Delta x_2} \int_{-h_1}^0 f_{2,j} f_{1,\bar{m}} dz & (n=j+N+2), \end{cases} \quad (3.15)$$

(3.14)와 (3.15)의 지수 $j=1, \dots, N$ 이고 선반길이는 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, ($i=1, 2$)로 정의되며 또 다른 지수는 (3.16)으로 나타내 수식표현을 간단히 하였다.

$$\bar{m} = \begin{cases} m-1, & m \leq N+1 \\ m-N-2, & m > N+1 \end{cases} \quad (3.16)$$

위의 두 식 (3.14)와 (3.15)으로부터 역류파형은 진행파형과 연관되어 서로 영향을 줌을 알 수 있다. 특히 역류파형의 내적에 지수적 감쇄 $\exp(-k_{i,j}\Delta x_i)$ 는 선반길이에 의해 결정되며 이 감쇄가 작으면 산란파 결정에 상당한 영향을 주게 된다. 한편 선반길이가 충분하여 완전한 감쇄가 발생하는 경우 역류파의 영향은 없어 진행파만 산란파 계산을 결정하게 된다. 다른 의미로 해석하면 선반길이가 충분하면 진행파만이 영향을 주게

되어 결국 진행과 근사법의 결과와 동일하게 되고 이 경우에는 계산속도가 매우 빠르게 된다. 한편 진행과 근사법은 역류파의 영향을 배제하기 때문에 선반길이가 짧은 경우에는 산란파를 정확히 계산할 수 없는 제약을 가지고 있다.

행렬표기법을 이용하여 (3.12)를 풀면 단일 계단에 대한 산란행렬(Scattering matrix)이 얻어진다.

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{D}_1 \tilde{\mathbf{X}}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^+ & \mathbf{T}_1^- \\ \mathbf{T}_1^+ & \mathbf{R}_1^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^+ \\ X_2^- \end{Bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{1,1}^+ & \mathbf{S}_{1,1}^- \\ \mathbf{S}_{1,2}^+ & \mathbf{S}_{1,2}^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^+ \\ X_2^- \end{Bmatrix}. \quad (3.17)$$

여기서 산란행렬은 $\mathbf{S}_1 = [\mathbf{S}_1^+ \ \mathbf{S}_1^-]$ 으로 표기하는 것이 편리하며 각 요소는 행렬을 요소로 갖는다. (3.17)이 성립하기 위해서는 역행렬 \mathbf{B}_1^{-1} 이 존재해야 하기 때문에 행렬 \mathbf{B}_1 는 정규행렬이어야 한다. 물리적 관점에서 보면 급격한 지형변화에 의해 파랑은 산란파를 형성하기 때문에 \mathbf{B}_1 는 반드시 정규행렬이 되며 따라서 이에 대한 별도의 증명은 필요하지 않다. (3.17)에서 행렬 \mathbf{R}_1^+ 과 \mathbf{T}_1^+ 는 주어진 입사파에 대한 반사파와 투과파의 계수로 앞에서 설명한 대로 계산하면 행렬 요소의 값이 정해진다.

변환행렬(Transfer matrix)는 이를 주어진 입력자료에 곱하면 미지수 여기서는 산란파의 진폭이 얻어지는 특이한 행렬로 정의된다. 단일계단의 경우 변환행렬은 산란행렬과 동일하게 되며 이들이 입력조건에 작용하면 구하고자 하는 산란파가 얻어진다. 다시 강조하면 산란행렬은 지형특성과 파랑 특성이 고려된 물리현상을 나타내는 계수이다. 만일 수심이 일정한 경우에는 파랑은 지형에 의해 변화가 발생하지 않아 반사파가 존재하지 않고 투과되며 이 경우에도 (3.17)이 성립하므로 역행렬 \mathbf{B}_1^{-1} 은 존재한다.

계산된 산란파 진폭 (3.17)의 \mathbf{X}_1 을 (3.4)에 대입하여 속도포텐셜을 구하면 이는 경계선으로부터 멀어질수록 지수적으로 감소하게 된다. 결국 선반길이가 충분히 길면 외측의 경계선에서 생성된 역류파형은 계단 경계선부근에서는 완전히 감쇄되어 영향을 주지 않게 된다. Devillard *et al.* (1988)은 이점에 착안하여 역류파가 완전히 감쇄될 정도로 충분한 선반길이를 갖는 지형에 대해 wide-spacing 근사법을 상용하였고 불규칙한 지형에서 완전 반사가 일어나는 길이인 Anderson localization을 연구하였다.

3.2 두 개의 계단

두 개의 계단으로 이루어진 지형에 대한 연구로는 Kirby and Dalrymple (1983)이 Trench 지형에 관한 것이 있다. 기존 연구는 유도되는 연립방정식의 크기가 작기 때문에 간단한 direct inversion 방법으로 해를 계산하였기에 이 경우에 포함된 중요한 물리 현상인 다중반사를 다루지 않았다. 그러나 본 연구에서는 다중반사 현상을 조명하고 이를 이용하여 계산의 효율성을 획기적으로 증대시키고자 한다.

두 계단에 의한 파랑변화에 대한 식은 (3.9)로부터 쉽게 얻는다. 이는 각각의 계단에 대한 산란행렬로 표현할 수 있다.

$$\begin{cases} X_1^- = \mathbf{R}_1^+ X_1^+ + \mathbf{T}_1^- X_2^- \\ X_2^+ = \mathbf{T}_1^+ X_1^+ + \mathbf{R}_1^- X_2^- \\ X_2^- = \mathbf{R}_2^+ X_2^+ + \mathbf{T}_2^- X_3^- \\ X_3^+ = \mathbf{T}_2^+ X_2^+ + \mathbf{R}_2^- X_3^- \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1^- \\ X_2^+ \\ X_2^- \\ X_3^+ \end{cases} = [\mathbf{S}_2^+ \quad \mathbf{S}_2^-] \begin{cases} X_1^+ \\ X_3^- \end{cases}. \quad (3.18)$$

여기서는 입사파랑의 진폭은 X_1^+ 와 X_3^- 이며 (3.18) 좌측 식의 좌변에 나타난 미지수를 입사진폭으로 나타내어 변환행렬을 구하고자 한다. 이를 위해 좌측 식의 우변에서 X_2^- 와 X_2^+ 를 입사진폭으로 나타내어야 한다. 셋째 식을 둘째 식에 대입하여 X_2^- 를 소거한다. 그리고 이를 넷째 식에 대입하면 쉽게 미지 벡터를 입사진폭으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} X_2^- &= (\mathbf{I} - \mathbf{R}_2^+ \mathbf{R}_1^-)^{-1} (\mathbf{R}_2^+ \mathbf{T}_1^+ X_1^+ + \mathbf{T}_2^- X_3^-) = \mathbf{S}_{2,3}^+ X_1^+ + \mathbf{S}_{2,3}^- X_3^-, \\ X_2^+ &= (\mathbf{T}_1^+ + \mathbf{R}_1^- \mathbf{S}_{2,3}^+) X_1^+ + \mathbf{R}_1^- \mathbf{S}_{2,3}^- X_3^- = \mathbf{S}_{2,2}^+ X_1^+ + \mathbf{S}_{2,2}^- X_3^-, \\ X_3^+ &= \mathbf{T}_2^+ \mathbf{S}_{2,2}^+ X_1^+ + (\mathbf{T}_2^+ \mathbf{S}_{2,2}^- + \mathbf{R}_2^-) X_3^- = \mathbf{S}_{2,4}^+ X_1^+ + \mathbf{S}_{2,4}^- X_3^-, \\ X_1^- &= (\mathbf{R}_1^+ + \mathbf{T}_1^- \mathbf{S}_{2,3}^+) X_1^+ + \mathbf{T}_1^- \mathbf{S}_{2,3}^- X_3^- = \mathbf{S}_{2,1}^+ X_1^+ + \mathbf{S}_{2,1}^- X_3^-, \end{aligned} \quad (3.19)$$

(3.18)의 우측 식에 제시한 산란행렬은 각각 4개의 하위 행렬을 요소로 가지며 이 행렬은 $(N+1)$ 정방행렬이 된다.

$$\mathbf{S}_2^+ = [\mathbf{S}_{2,1}^+ \quad \mathbf{S}_{2,2}^+ \quad \mathbf{S}_{2,3}^+ \quad \mathbf{S}_{2,4}^+]^T; \quad \mathbf{S}_2^- = [\mathbf{S}_{2,1}^- \quad \mathbf{S}_{2,2}^- \quad \mathbf{S}_{2,3}^- \quad \mathbf{S}_{2,4}^-]^T. \quad (3.20)$$

그리고 (3.19)에서 \mathbf{I} 는 $(N+1)$ 차 단위행렬이다. 두 계단지형으로부터 외측으로 향하는

산란파의 진폭은 X_1^- 과 X_3^+ 이다.

두 계단에 포함된 다중반사는 Mei *et al.* (2005)이 장파에 대한 관련 부분을 확장하면 쉽게 설명할 수 있다. 설명을 간단히 하기 위해 입사파는 계단의 오른쪽에서만 진행되는 것으로 국한한다. 진폭 X_1^+ 을 갖는 입사파가 $x=x_1$ 에 위치한 첫 계단을 만나면 일부 파랑 에너지가 둘째 선반으로 전파하여 투과파 $\mathbf{T}_1^+ X_1^+$ 를 생성하고 나머지 에너지는 반사되어 첫 선반의 좌측으로 진행하여 반사파 $\mathbf{R}_1^+ X_1^+$ 을 만든다. 둘째 선반에서 진행되는 투과파 $\mathbf{T}_1^+ X_1^+$ 가 둘째 경계선을 만나면 이것이 입사파가 되어 첫 경계선에서 발생한 것과 동일한 현상이 일어난다. 즉 셋째 선반으로 진행되는 투과파는 $\mathbf{T}_2^+ \mathbf{T}_1^+ X_1^+$ 이고 둘째 선반의 좌측으로 진행되는 반사파는 $\mathbf{R}_2^+ \mathbf{T}_1^+ X_1^+$ 이 된다. 이 반사파가 첫째 경계선에 도달하면 같은 현상이 반복되어 일부는 투과하여 $\mathbf{T}_1^- \mathbf{R}_2^+ \mathbf{T}_1^+ X_1^+$ 이 되고 나머지는 반사하여 둘째 선반의 우측으로 진행되는 반사파 $\mathbf{R}_1^- \mathbf{R}_2^+ \mathbf{T}_1^+ X_1^+$ 을 형성한다. 이러한 반사와 투과과정이 둘째 선반에서 무한히 발생하여 이를 그림 1에 도시하였다.

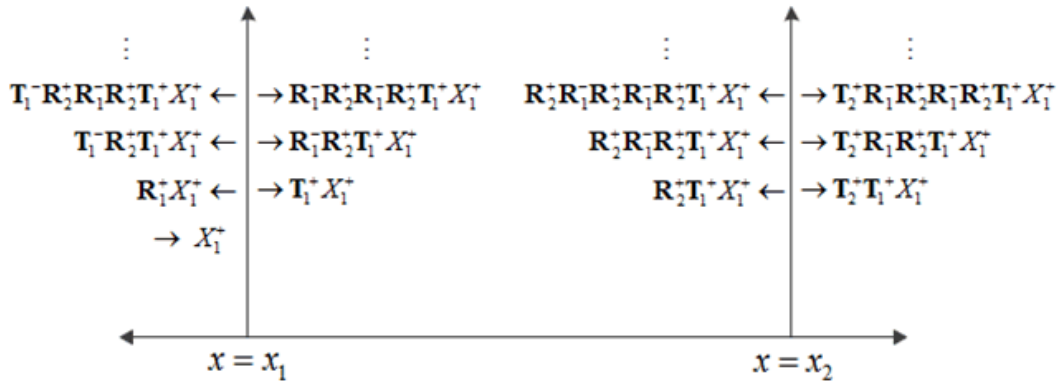


그림 1. 두 계단에서 발생하는 다중반사

그림 1에서 첫째 선반의 좌측 $x < x_1$ 에서 좌측으로 진행되는 모든 파랑을 더하면 전체 반사파를 얻게 된다.

$$X_1^- = \mathbf{R}_1^+ X_1^+ + \mathbf{T}_1^- \mathbf{R}_2^+ \mathbf{T}_1^+ X_1^+ + \mathbf{T}_1^- \mathbf{R}_2^+ \mathbf{R}_1^- \mathbf{R}_2^+ \mathbf{T}_1^+ X_1^+ + \dots = \left[\mathbf{R}_1^+ + \mathbf{T}_1^- (\mathbf{I} - \mathbf{R}_2^+ \mathbf{R}_1^-)^{-1} \mathbf{R}_2^+ \mathbf{T}_1^+ \right] X_1^+, \quad (3.21)$$

여기서 Neumann series identity을 사용하였고 이는 익숙한 무한 등비급수의 합을 행렬

로 확장한 것에 해당한다. 이 때 등비행렬 $\mathbf{R}_2^+ \mathbf{R}_1^-$ 의 크기는 1보다 작아야 한다 (Greenberg 1978). 유사한 방법으로 다른 산란파의 진폭에 대한 물리적 현상을 설명할 수 있고 이는 (3.19)에 주어진 결과와 동일하게 된다. 그래서 (3.19)로 주어진 식의 결과는 두 계단에서 발생하는 다중반사를 포함한 전체 산란파의 진폭이 됨이 분명하다.

3.3 다중 계단

앞 절의 두 계단에서 기술한 방법을 확장하면 다중 계단에 대한 산란파를 얻을 수 있다. 다만 본 연구에서는 순차적인 방법을 사용하고자 m 개의 계단에 대한 것을 고찰하고자 한다. 이 때 마지막 m 번째 계단을 제외한 첫 $(m-1)$ 계단의 산란행렬 $\mathbf{S}_{m-1} = [\mathbf{S}_{m-1}^+ \ \mathbf{S}_{m-1}^-]$ 은 이미 위에 기술한 방법으로 계산한 것을 사용한다. 그리고 m 번째 계단의 산란행렬 \mathbf{R}_m^\pm 과 \mathbf{T}_m^\pm 도 지형과 파장이 정해지면 구할 수 있음도 다시 언급한다. 그러면 m 개의 계단에 대한 연립방정식은 (3.22)가 된다.

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1^- = \mathbf{S}_{m-1,1}^+ X_1^+ + \mathbf{S}_{m-1,1}^- X_m^-, \\ X_2^+ = \mathbf{S}_{m-1,2}^+ X_1^+ + \mathbf{S}_{m-1,2}^- X_m^-, \\ \vdots \\ X_{m-1}^- = \mathbf{S}_{m-1,2m-3}^+ X_1^+ + \mathbf{S}_{m-1,2m-3}^- X_m^-, \\ X_m^+ = \mathbf{S}_{m-1,2m-2}^+ X_1^+ + \mathbf{S}_{m-1,2m-2}^- X_m^-, \\ X_m^- = \mathbf{R}_m^+ X_m^+ + \mathbf{T}_m^- X_{m+1}^-, \\ X_{m+1}^+ = \mathbf{T}_m^+ X_m^+ + \mathbf{R}_m^- X_{m+1}^-. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} X_1^- \\ X_2^+ \\ X_2^- \\ \vdots \\ X_m^- \\ X_{m+1}^+ \end{array} \right\} = [\mathbf{S}_m^+ \ \mathbf{S}_m^-] \left\{ \begin{array}{l} X_1^+ \\ X_{m+1}^- \end{array} \right\}. \quad (3.22)$$

(3.22)에서 볼 수 있듯이 미지 진폭 X_1^+ 과 X_{m+1}^- 은 이미 구한 첫 $(m-1)$ 계단의 산란행렬로 인해 느슨히 연계되어 있다. 즉 X_m^- 이 입사파량의 진폭으로 구하여지면 첫 $(m-1)$ 계단의 모든 산란행렬은 쉽게 계산되고 이를 구한 것이 (3.23)이다.

$$\begin{aligned} X_m^- &= (\mathbf{I} - \mathbf{R}_m^+ \mathbf{S}_{m-1,2m-2}^-)^{-1} \mathbf{R}_m^+ \mathbf{S}_{m-1,2m-2}^+ X_1^+ + (\mathbf{I} - \mathbf{R}_m^+ \mathbf{S}_{m-1,2m-2}^-)^{-1} \mathbf{T}_m^- X_{m+1}^- \\ &\equiv \mathbf{S}_{m,2m-1}^+ X_1^+ + \mathbf{S}_{m,2m-1}^- X_{m+1}^-. \end{aligned} \quad (3.23)$$

위 방법으로 구한 첫 $(m-1)$ 계단의 산란행렬은 (3.24)가 된다.

$$\mathbf{S}_{m,i}^+ = \mathbf{S}_{m-1,i}^+ + \mathbf{S}_{m-1,i}^- \mathbf{S}_{m,2m-1}^+; \quad \mathbf{S}_{m,i}^- = \mathbf{S}_{m-1,i}^- \mathbf{S}_{m,2m-1}^- \quad (i=1, \dots, 2m-2). \quad (3.24)$$

(3.24)에는 이미 계산된 첫 $(m-1)$ 계단의 산란행렬과 (3.23)에서 구한 산란행렬의 곱으로 나타내짐을 주목해야 한다. 물리적으로 의미가 있는 반사파 진폭과 투과파 진폭을 나타내면 (3.25)와 (3.26)이 된다.

$$X_1^- = (\mathbf{S}_{m-1,1}^+ + \mathbf{S}_{m-1,1}^- \mathbf{S}_{m,2m-1}^+) X_1^+ + \mathbf{S}_{m-1,1}^- \mathbf{S}_{m,2m-1}^- X_{m+1}^- \equiv \mathbf{S}_{m,1}^+ X_1^+ + \mathbf{S}_{m,1}^- X_{m+1}^-. \quad (3.25)$$

$$X_{m+1}^+ = \mathbf{T}_m^+ \mathbf{S}_{m,2m-2}^+ X_1^+ + (\mathbf{T}_m^+ \mathbf{S}_{m,2m-2}^- + \mathbf{R}_m^-) X_{m+1}^- \equiv \mathbf{S}_{m,2m}^+ X_1^+ + \mathbf{S}_{m,2m}^- X_{m+1}^-. \quad (3.26)$$

만일 주어진 지형의 반사율과 투과율만이 대상이 되어 지형내부의 모든 산란파를 구하지 않는 경우에는 식 (3.24)에서 단 2개의 산란행렬의 계산이 필요하기 때문에 계산속도와 기억용량이 현저하게 감소된다. 즉 (3.23)과 (3.24)에서 $\mathbf{S}_{m,1}^+$, $\mathbf{S}_{m,1}^-$ 그리고 $\mathbf{S}_{m,2m}^+$, $\mathbf{S}_{m,2m}^-$ 을 계산하면 된다. 그러므로 이 방법을 사용하면 아주 많은 계단으로 구성된 지형이라도 쉽고 빠르게 반사율과 투과율을 계산할 수 있게 된다. 이 계산은 근사 방법이 사용되지 않아 정확도는 전체를 계산하는 경우와 동일하나 계산의 신속함을 얻기 위해 계단 내부의 많은 산란행렬을 구하지 않을 뿐이다.

(3.23) - (3.26)에서 계산된 것을 두 계단에 적용하면 앞에서 구한 (3.19)와 동일함을 입증할 수 있다. 이 방법에서 계산시간이 많이 소요되는 역행렬 계산은 (3.23)에 나타난 바와 같이 $N+1$ 행렬에 대한 것으로 기존 연구에서 사용한 $2M(N+1)$ 행렬에 대한 direct inversion에 비하면 크게 줄어든 것이다. 이러한 계산상의 장점 이외에도 본 방법은 기존 연구인 Guazzelli *et al.* (1992)에 비해 월등한 장점을 갖고 있다.

Guazzelli 등은 계산시간 단축을 위해 구성 계단을 다수의 그룹으로 나누고 이 그룹에 대한 산란행렬을 구한 뒤 그룹간에는 역류파의 영향을 무시한 평면파 근사법을 사용한 hybrid wide-spacing 근사를 제안하였다. 따라서 그들의 방법은 그룹의 구성방법에 따라 그리고 보다 중요한 역류파의 영향을 무시하였기에 계산의 정확도가 영향을 받게 된다. 그러나 본 연구의 방법은 계산에 필요한 역행렬의 크기를 최소로 하여 계산속도도 빠를 뿐 아니라 무엇보다도 근사적인 계산법을 사용하지 않아 정확성이 보장된다는 점에 있다. 결국 본 방법은 기존 연구에서는 불가능한 많은 수의 계단과 역류파형을 사용할

수 있고 또한 계산 속도 역시 현저히 빠른 장점을 가진다.

구성된 계단지형에 대해 평면파 근사법의 결과를 얻기 위해서는 (3.23) - (3.26)에서 $N=0$ 을 대입하면 얻는다. 한편 개별 계단에서는 역류파를 고려하나 계단 간에는 역류파의 영향을 무시하는 wide-spacing 근사도 개별 계단에서 구한 산란행렬 중에 진행파 성분만을 취하고 이를 본 연구의 방법으로 구하면 된다. 그리고 위에 기술한 바와 같이 hybrid wide-spacing 근사 계산도 쉽게 얻을 수 있다. 그러나 이 방법들은 근사법으로 정확도가 낮은 단점이 있다.

제 4 장 수치결과

본 연구에서 개발된 모형을 검증하기 위해 기존 수치결과와 수리실험 자료와 비교하여 본 모형의 우수성을 입증하고자 한다. 이미 언급한 바와 같이 본 모형은 2차원 지형에서의 과량변형을 대상으로 하며 입사파는 오른쪽으로 진행하는 경우로 국한한다. 또한 수심이 변하는 구역의 외측인 좌우측에서는 수심이 일정한 경우에 대해 실험하였다.

본 모형의 계산속도를 측정하기 위해 계단 100개의 지형에서 역류과형의 개수를 200개까지 증가시켜 기존 direct inversion 방법과 본 방법의 CPU 소요시간을 측정하였다. 표 1에는 계단과 역류과형의 수에 의해 정해지는 미지수의 개수도 나타내었으며 기존 방법으로는 계산시간이 너무 많이 걸려 실용성이 없는 경우까지 대상으로 정하였다.

표 1. 입사파 두 개에 대한 기존 direct inversion과 본 모형의 CPU 계산시간.

M	N	No. of	CPU time (sec)	
			Direct	Present
steps	modes	unknowns	Inversion	method
100	0	200	0.10	0.00
	1	400	0.76	0.02
	5	1200	32.57	0.03
	10	2200	243.38	0.16
	20	4200	1701.60	0.76
	200	40200	-	626.61

‘-’ denotes no result.

표에 보인 바와 같이 본 모형의 계산속도는 미지수의 개수가 증가할수록 현저하게 감소하는 것을 알 수 있고 기존의 방법으로는 현실적으로 불가능한 경우까지도 계산 가능성을 보여준다. 특히 지형내부의 과량변형 전체를 계산하는 것이 아니라 지형전체에 의한 반사율과 투과율만을 계산하는 경우 이미 기술한 바와 같이 본 모형의 계산능력을 현저하게 증가시킬 수 있다.

일정한 수심 위에 돌출한 저면 길이 l 의 포물형 지형에 의한 반사율을 계산하기 위해 Porter and Staziker (1995)가 연구한 지형 (4.1)을 사용하였다.

$$h(x) = h_0 \left[2 \left(\frac{x}{\lambda} \right)^2 - 2 \frac{x}{\lambda} + 1 \right], \quad 0 \leq x \leq \lambda. \quad (4.1)$$

무차원 변수가 $\omega^2 \lambda / g \rightarrow 0$ 인 경우에는 지형은 수직 판으로 변하고 그 높이는 일정 수심 h_0 의 반에 이른다. Chamberlain and Porter (2006)도 동일 지형의 반사율을 구하기 위해 여러 파형의 연계를 고려한 환경사근사식을 사용하였다. 그림 2에 무차원 폭 $\omega^2 \lambda / g$ 이 변할 때 계산한 반사율을 나타내었다.

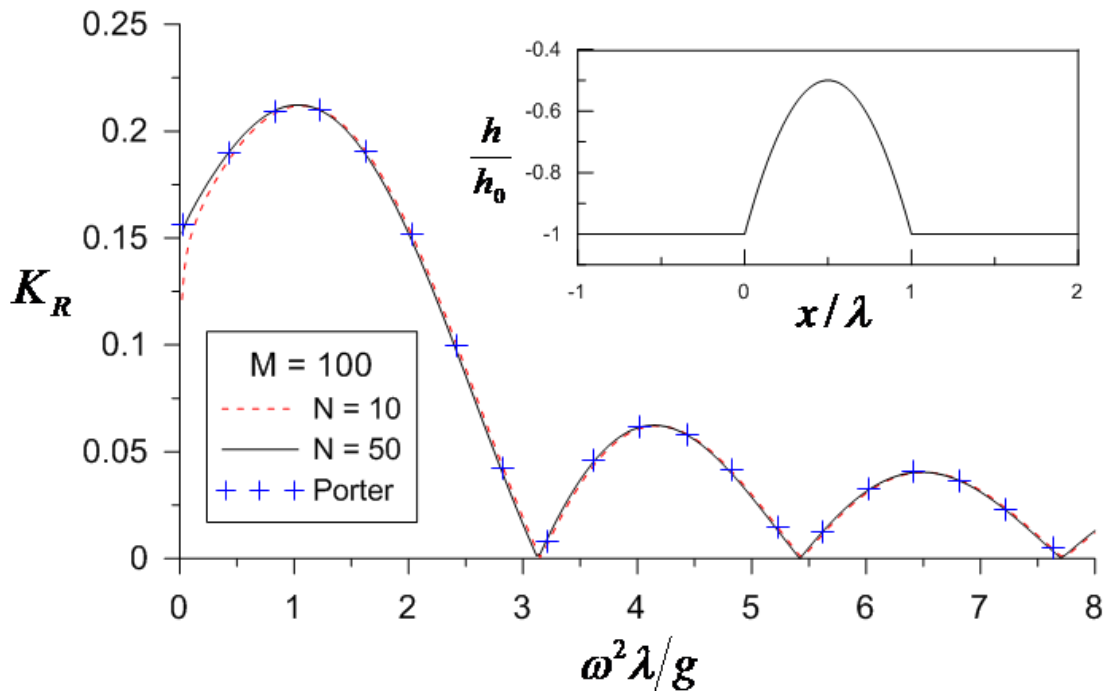


그림 2. 포물형 돌출지형에 대한 반사율 비교

그림의 삽도는 지형의 형상이고 붉은 색 점선의 반사율은 역류파형 10개를 사용한 결과이고 검은 색 실선은 역류파 50개에 대한 결과이다. 돌출 지형에 대해 100개의 계단이 본 계산에 사용되었고 그림의 십자기호는 Porter and Porter (2000)가 선형 경계치 문제 (3.1)를 정밀한 방법으로 수행한 결과이며 엄밀해이다. 돌출지형이 수직판으로 갈수록 역류파의 영향이 강해져 그 개수를 늘려야 하며 이 실험은 본 방법의 정밀도를 보여 주는 한 예이다. 수치계산의 round-off 오차를 줄이기 위해 배정도수를 사용하였으며 이하의 모든 수치실험에서도 이를 사용하였다.

정현과 지형에 의한 파랑변형은 많은 연구자들이 수행하였고 이 가운데 단일형태의 정현파 사주에 대해 Davies and Heathershaw (1984)가 수리모형실험과 수치실험을 실시하였다. 대상 지형은 (4.2)로 주어진다.

$$h(x) = h_0 - b \sin(lx), \quad 0 \leq x \leq 2\pi n/l, \quad (4.2)$$

여기서 h_0 는 지형의 평균 수심이고 n 은 사주의 개수, b 사주의 진폭 그리고 l 은 사주의 파수이다. 한편 두 개의 상이한 파장을 갖는 사주에 대한 연구는 Guazzelli *et al.* (1992)이 수행하였고 대상 지형에 대한 식은 (4.3)이다.

$$h(x) = h_0 - b[\sin(lx) + \sin(mx)], \quad 0 \leq x \leq 2\pi n/l, \quad (4.3)$$

여기서 m 은 긴 파장과 짧은 파장의 비이다. 본 연구에서는 각 사주를 하나의 그룹으로 취급하였고 인접 사주는 공통의 계단선반을 공유한다. 위의 사주지형에 대한 매개변수들은 표 2에 정리하였다.

표 2. 정현파 사주 실험에 사용된 매개변수들

Bed type	Case	h_0	b (cm)	$2\pi/l$	n	m
Sinusoidal	DH1	15.6	5	100	2	
	DH2	15.6	5	100	4	-
	DH3	31.2	5	100	10	
Doubly sinusoidal	G1a	2.5	1	12	4	2
	G1c	4	1	12	4	2
	G2a	2.5	0.5	6	4	1.5
	G2c	4	0.5	6	4	1.5
	G3a	2.5	1	6	4	1.5
	G3c	4	1	6	4	1.5

모형의 정밀도를 검증하기 위해 역류파의 개수를 증가시켜 수렴성을 검토하였다. 표 3은 단일 정현파인 DH2에 대해 반사파 증폭이 극대값을 보이는 $2k/l=1$ 과 2에 대한 수치결과를 나타내었다. 본 모형이 매우 많은 미지수를 다룰 수 있음을 보이기 위해 계단 개수를 1600개와 역류파를 200개까지 각각 증가시켰다. 정해진 어떤 계단 수에 대해 역류파의 개수를 늘리면 수치계산 결과들은 일정한 값으로 수렴한다. 계단의 수와 역류파형의 수를 동시에 증가시키면 일정한 하나의 값으로 수렴하게 된다.

표 3. 표 2의 DH2 지형에서 역류과형의 증가에 따른 수렴성 실험

M steps	N modes	K_R		M steps	N modes	K_R	
		$2k/l=1$	$2k/l=2$			$2k/l=1$	$2k/l=2$
100	0	0.74161	0.07987	400	0	0.74606	0.08167
	1	0.74113	0.03805		1	0.74367	0.04132
	10	0.73797	0.05420		10	0.74127	0.03760
	30	0.73751	0.05391		30	0.74072	0.03967
	50	0.73746	0.05410		50	0.74056	0.04008
	100	0.73744	0.05415		100	0.74052	0.04005
	200	0.73743	0.05417	200	0.74050	0.04005	
M steps	N modes	K_R		M steps	N modes	K_R	
		$2k/l=1$	$2k/l=2$			$2k/l=1$	$2k/l=2$
800	0	0.74669	0.08180	1600	0	0.74700	0.08184
	1	0.74399	0.04172		1	0.74413	0.04190
	10	0.74151	0.03718		10	0.74159	0.03708
	30	0.74113	0.03789		30	0.74125	0.03752
	50	0.74100	0.03833		50	0.74117	0.03769
	100	0.74088	0.03866		100	0.74108	0.03795
	200	0.74086	0.03865	200	0.74102	0.03809	

단일 정현파 사주에 대한 Davies and Heathershaw (1984)가 제시한 결과는 제 2 증폭이 발생하지 않았으나 후속 연구인 O' Hara and Davies (1993)와 Chamberlain and Porte (1995)의 결과에는 상당한 반사가 이 부근에서 발생하였으며 이는 수치실험 결과에 보다 가깝기 때문에 후속 모형이 정밀성에서 더 우수하다고 주장하였다. 이 논란의 여부를 평가하기 위해 계단의 수와 역류파의 수를 달리하는 2개의 조합에 대해 실험하였다. 그림 3은 사주 한 파장당 100개의 계단과 10개 역류파로 계산한 결과를 점선으로 400개 계단과 50개 역류파를 사용한 결과는 실선으로 나타내었다. 본 그림의 해상도로는 두 곡선이 동일함을 보여 이 실험의 경우에는 100개의 계단과 10개 역류파를 사용하면 충분한 정밀도를 갖는 것으로 평가된다. 그러나 분명히 $2k/l=2$ 에서 2차 증폭이 일어나지 않음을 알 수 있다. 그래서 이 지형의 경우는 해저경사가 비교적 낮아 O' Hara and Davies (1993)의 평면파 근사도 제 2 증폭 부근을 제외하면 유사한 결과를 보이는 것으로 분석된다. 다만 사주의 개수가 증가하면 제1 증폭의 피크를 보이는 파랑의 주파수가 낮은 쪽으로 약간 움직인다.

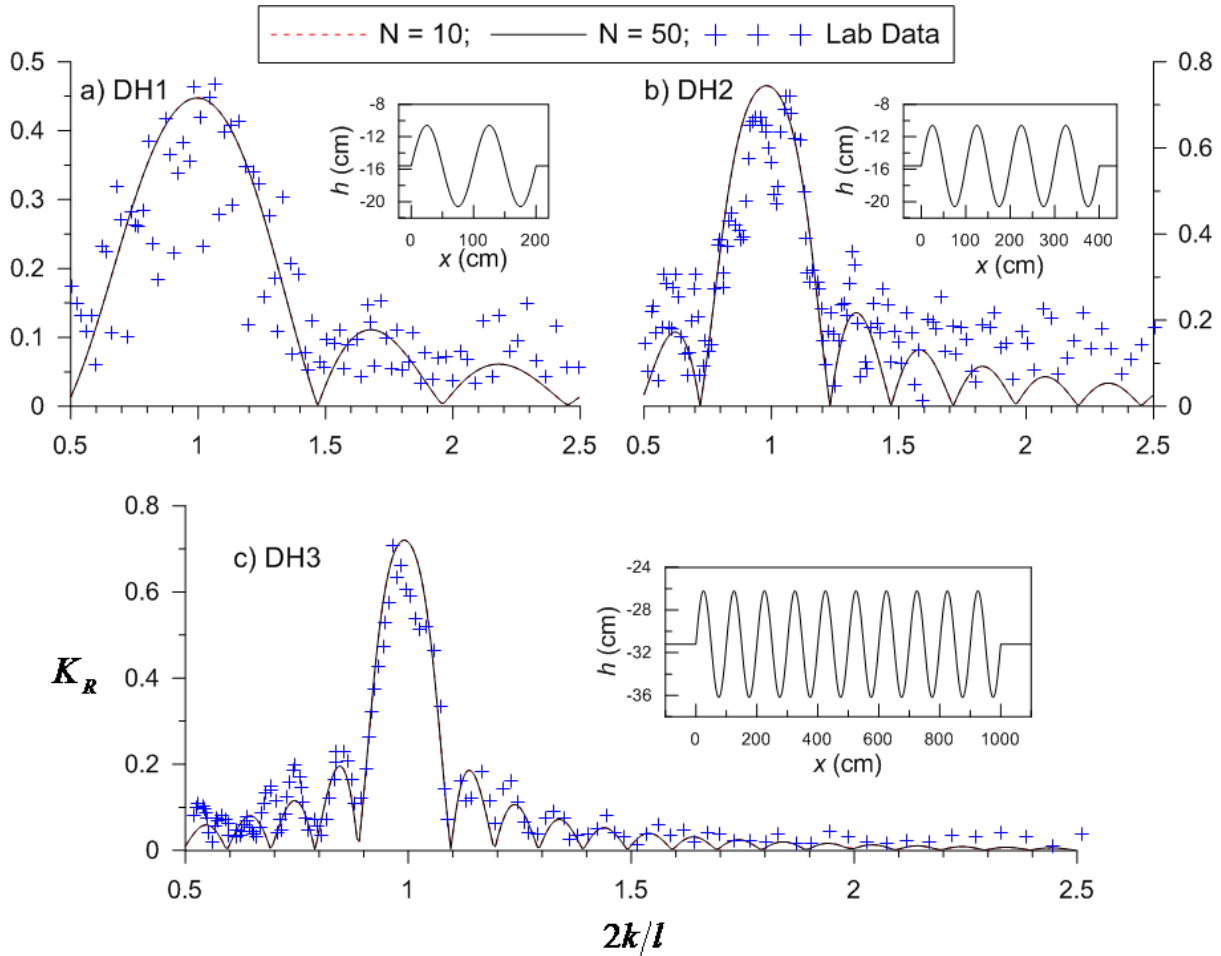


그림 3. 표2의 단일 정현파 사주에 대한 반사율 계산비교

그림 3에서 기호는 Davies and Heathershaw (1984)의 수리모형실험 결과이며 조파기 반대편에 설치된 경사 해안으로부터 10% 정도의 반사파가 관측된 것으로 알려졌으며 통상 그러하듯이 관측치는 상당한 산포 양상을 보이나 수치실험결과는 수리실험의 주된 경향을 잘 보여준다.

아래의 그림 4는 상이한 두 개 정현파형 사주지형 (Guazzelli *et al.*, 1992)에 대한 결과들의 비교이다. 모든 지형은 4개의 사주로 형성되었으며, 하나의 사주에는 상이한 파장을 갖는 두 개의 정현파가 중첩되어 있어 이 때 긴 파장과 짧은 파장의 비인 m 값이 존재한다. 이로 인해 부차적인 증폭이 발생하며 주파수비가 $2k/l = (m-1)$ 인 저주파 부근에서는 “difference resonance” 가 발생하고 $2k/l = (m+1)$ 고주파 부근에서는 “sum resonance” 가 각각 발생한다 (Guazzelli *et al.* 1992; O’ Hara and Davies, 1993).

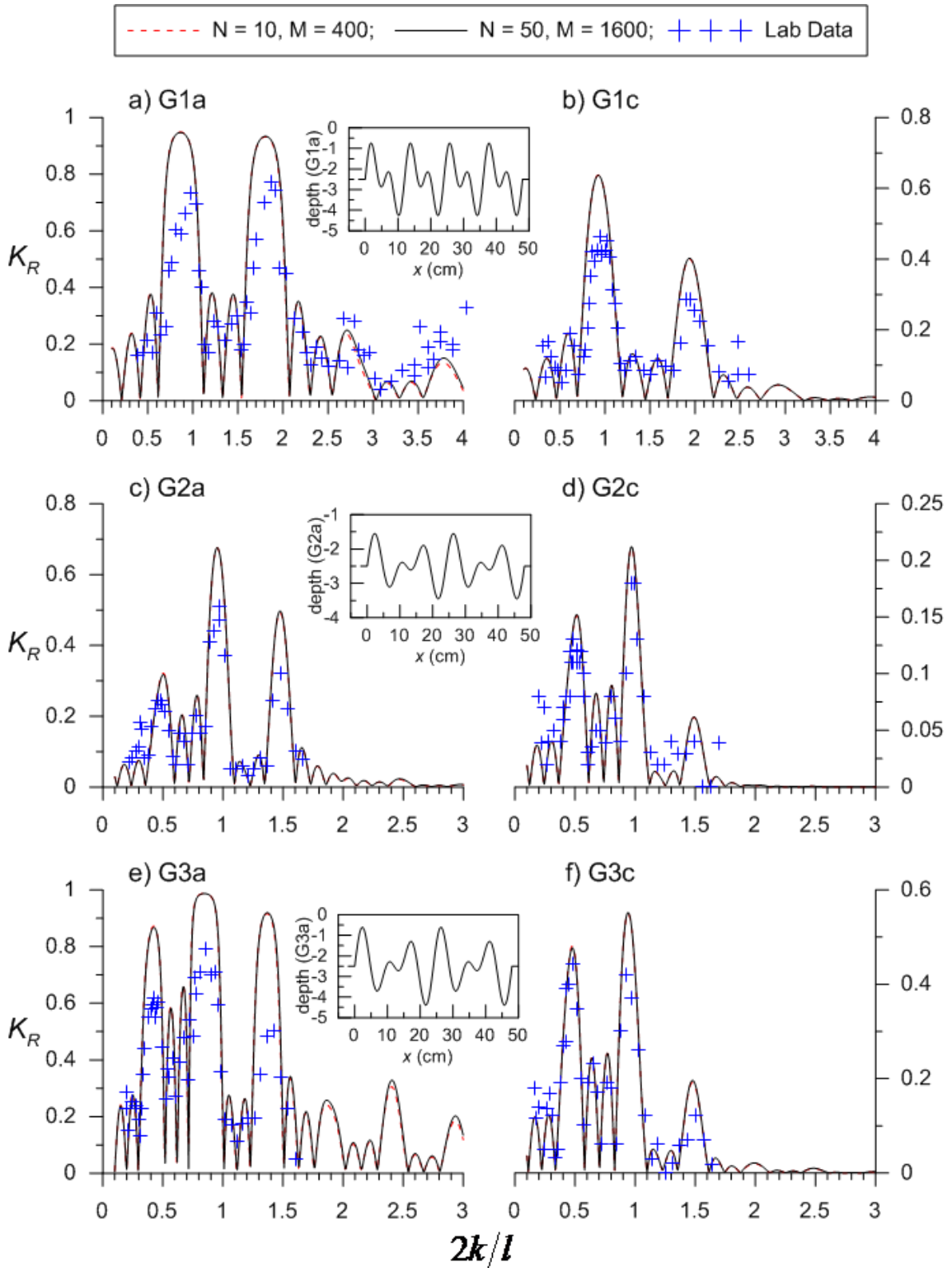


그림 4. 상이한 두 개 정현파형 사주지형 (Guazzelli *et al.*, 1992)에 대한 반사율

사주 구성 파장비가 정수가 아닌 $m=1.5$ 경우에는 그림 4 c) - f)에서 볼 수 있듯이 상당한 difference resonance가 발생한다. 계단지형은 앞의 그림 3에서와 같이 사주 한 파장당 100개의 계단과 10개 역류파로 계산한 결과를 점선으로 400개 계단과 50개 역류파를 사용한 결과는 실선으로 나타내었다. 사주 높이의 비인 b/h_0 가 큰 경우 예로 그림 4 a)는 4 b)에 비해 반사율이 크다. 반사율 피크의 이동에 영향을 주는 또 다른 요인은 해저경사로 이는 그림 4 c)와 4 e)를 비교하면 해저경사 큰 4 e)가 훨씬 높다.

그림 5는 계단지형에 대한 wide-spacing 근사로 계산한 반사율로 Devillard *et al.* (1988)은 계단지형의 모든 선반이 여기에 존재하는 역류파가 완전히 감쇄되는 충분한 길이를 갖는 특별한 조건을 대상으로 하였다. 그 후 O' Hara and Davies (1992)는 각 계단의 높이가 해당 수심의 0.02배 보다 작으면 Devillard *et al.*가 사용한 wide-spacing 근사를 보다 간단한 평면파 근사로 바뀌도 거의 같은 결과를 보인다고 밝혔다. 또한 해저경사가 작은 지형에서는 위의 두 근사법을 사용한 결과는 파형연계기법의 결과와 큰 차이를 보이지 않음도 보였다. 계단의 개수 변화에 따른 wide-spacing 근사법의 정밀도를 분석하기 위해 해저경사가 급한 지형도 포함하여 수치실험을 수행하였다. 그림 5에는 상이한 3개의 방법이 사용되었다. 여기서 EFEM은 파형연계기법을 의미하고 엄밀해에 속하며 근사법으로는 wide-spacing 근사와 평면파 근사가 사용되었다. 이 계산에서 역류파의 개수는 50개로 고정하였으나 계단의 개수는 달리하여 이로 인한 반사율의 변화를 보고자 시도하였다. 그림에서 분명히 알 수 있듯이 계단의 수가 증가하면 두 근사법으로 계산한 결과는 서로 근접하는 양상을 보인다. 이는 계단의 수가 충분히 많게 구성하면 wide-spacing 근사의 장점이 소멸되는 것으로 풀이할 수 있다. 한편 많은 수의 계단은 주어진 지형을 재현하는 데 필요한 조건임을 지적하고자 한다. 다시 강조하지만 그림 5는 EFEM만이 해저경사가 급한 지형에서도 올바른 결과를 가져다 주는 것을 보여주고 있다.

이미 앞에서 기술한 바와 같이 주어진 계단지형을 다수의 그룹으로 나누고 각각의 그룹에 대해 산란행렬을 구하고 이 결과를 동일한 방법으로 다시 계산하면 해당 연립방정식을 직접 풀어 계산한 값과 같게 된다. 이러한 그룹 구성을 사용한 방법의 장점은 각 그룹간에서 계산한 산란행렬이 상호간에 어떻게 작용하는 지에 대한 분석을

가능하게 해준다.

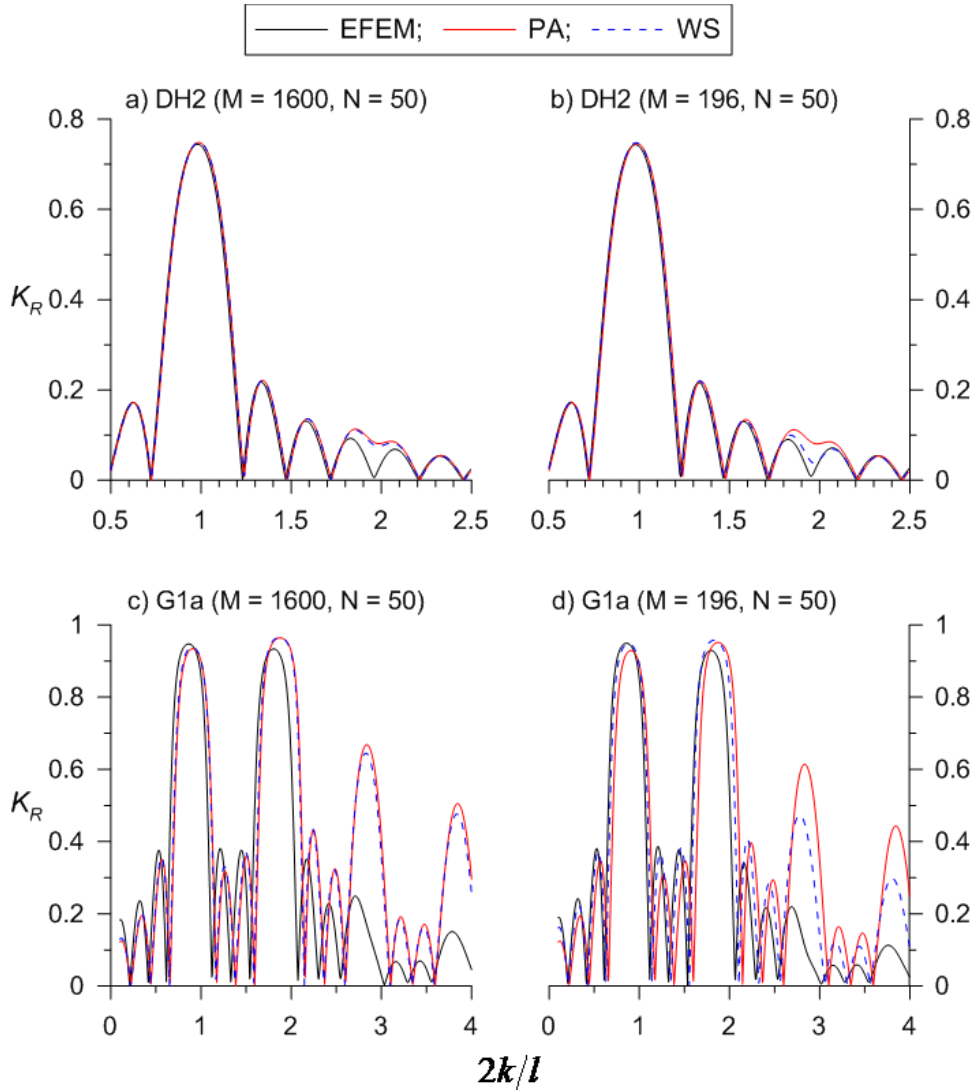


그림 5. 표 2의 지형에 대한 wide-spacing 근사의 계단 개수에 따른 상이한 3개 방법으로 계산한 반사율 변화

이를 보이하고자 “DH2”와 “G1a” 두 지형에 대해 역류파 10개를 사용하고 이 지형은 4개의 사주로 구성되었으며 하나의 사주를 100개의 계단으로 나타내었다.

그림 6은 해당 그룹에 대한 (3.4)의 반사 진행과 진폭 $|p_1^-|$ 이고 단위 진폭의 입사파가 $x \rightarrow -\infty$ 부터 계단으로 향할 때 계산한 값이다. 그림 6a는 위 사주 지형에서 첫 두 개의 사주만을 고려한 경우로 각 사주(또는 그룹)에 대해 계산한 산란행렬의

반사율과 투과율 $\tilde{\mathbf{R}}_i^{\pm}$ and $\tilde{\mathbf{T}}_i^{\pm}$ 을 입사파 주기에 대한 변화이다.

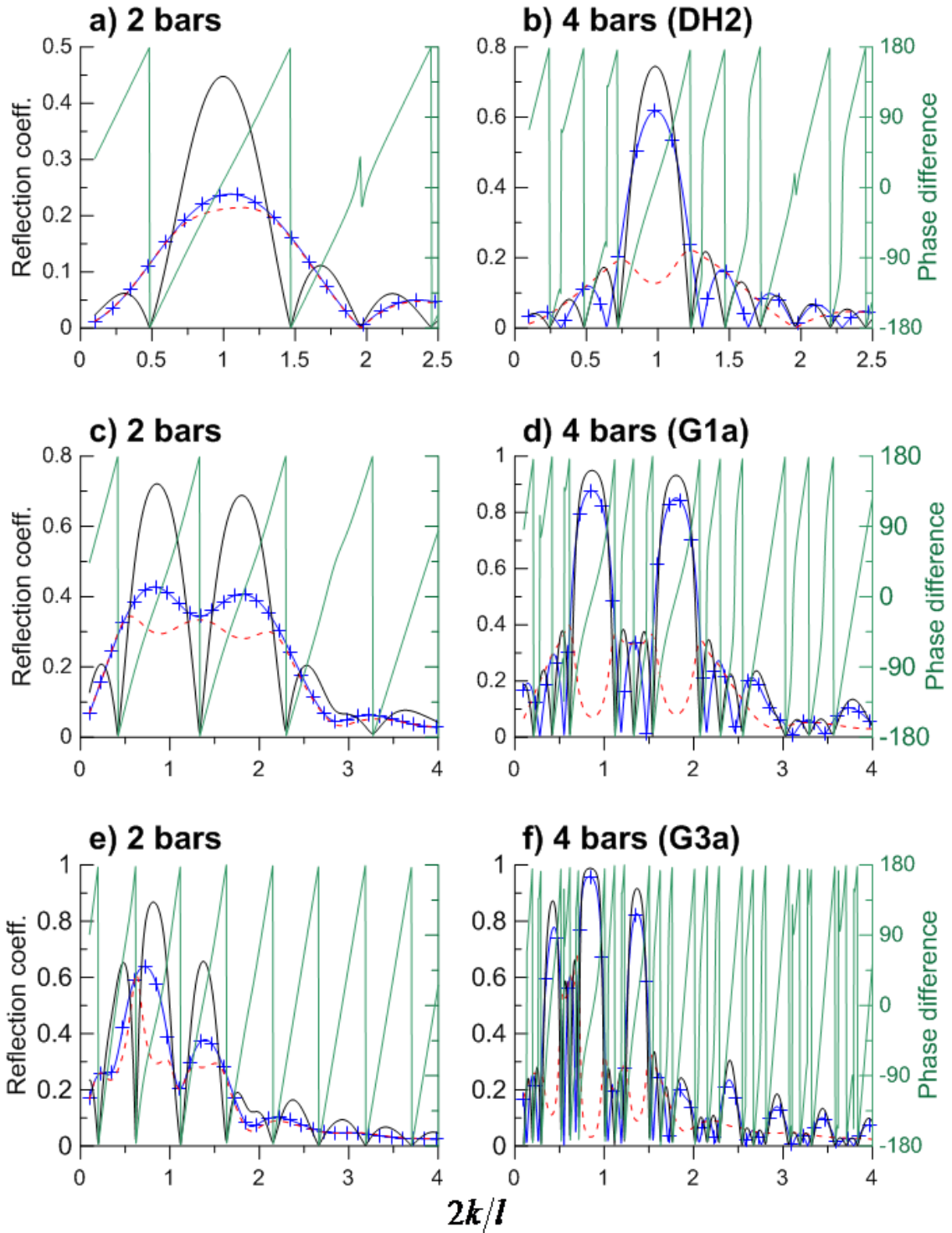


그림 6. 상이한 사주지형에 대해 구성 사주간의 상호작용을 보이기 위한 반사율의 입사파 주기에 따른 변화

산란율 $\tilde{\mathbf{R}}_i^\pm$ and $\tilde{\mathbf{T}}_i^\pm$ 는 (3.25)와 (3.26)으로 계산하였고 해당 사주의 산란식은 (3.18)과 유사하게 된다.

$$\begin{cases} X_1^- = \tilde{\mathbf{R}}_1^+ X_1^+ + \tilde{\mathbf{T}}_1^- X_{101}^- \\ X_{101}^+ = \tilde{\mathbf{T}}_1^+ X_1^+ + \tilde{\mathbf{R}}_1^- X_{101}^- \\ X_{101}^- = \tilde{\mathbf{R}}_2^+ X_{101}^+ + \tilde{\mathbf{T}}_2^- X_{201}^- \\ X_{201}^+ = \tilde{\mathbf{T}}_2^+ X_{101}^+ + \tilde{\mathbf{R}}_2^- X_{201}^- \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1^- \\ X_{101}^+ \\ X_{101}^- \\ X_{201}^+ \end{cases} = [\tilde{\mathbf{S}}_2^+ \quad \tilde{\mathbf{S}}_2^-] \begin{cases} X_1^+ \\ X_{201}^- \end{cases}. \quad (4.4)$$

(4.4)에서 반사파의 진폭 벡터 X_1^- 은 고려한 사주지형 양측에서 오는 입사파 X_1^+ 와 X_{201}^- 로부터 계산한 값이다. (4.4)를 풀면 (4.5)를 얻는다.

$$X_1^- = [\tilde{\mathbf{R}}_1^+ + \tilde{\mathbf{T}}_1^- (\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{R}}_2^+ \tilde{\mathbf{R}}_1^-)^{-1} \tilde{\mathbf{R}}_2^+ \tilde{\mathbf{T}}_1^+] X_1^+ + \tilde{\mathbf{T}}_1^- (\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{R}}_2^+ \tilde{\mathbf{R}}_1^-)^{-1} \tilde{\mathbf{T}}_2^- X_{201}^-. \quad (4.5)$$

입사파 X_1^+ 가 두 개의 사주에 작용하여 얻는 반사파는 두 개의 성분으로 되어 있다. $\tilde{\mathbf{R}}_1^+$ 는 이 가운데 첫 사주에서 반사된 것이고 나머지는 두 개의 사주에서 다중반사에 의해 생성된 것이다. 그림 6a에서 검은 실선은 두 개의 사주로부터 생성된 반사율이고 기호 +를 포함한 파란색 선은 $\tilde{\mathbf{R}}_1^+$ 이고 붉은 점선은 다중반사에 의한 성분이다. 그리고 녹색 선은 (4.5)에 존재하는 두 성분의 위상차이다. $2k/l=1$ 부근에서 위상은 거의 같아 두 성분이 합해져 증폭으로 나타난다. 반면에 $2k/l=1.47$ 에서는 위상이 반대가 되어 거의 같은 진폭이 상쇄되어 반사율이 없게 된다. $2k/l=2$ 부근에서는 제 2 증폭이 발생하나 진폭의 크기가 0에 가까워 위상이 같아도 계산한 반사율은 아주 작아지게 된다.

위와 유사하게 첫 3개 사주에 대한 $\tilde{\mathbf{S}}_3^\pm$ 를 (3.23) - (3.26)으로 계산하였다. 마지막으로 주어진 4개의 사주에 대한 계산을 위해 위의 식들을 다시 사용하였다. 그러면 주어진 문제에 대한 반사파 벡터 X_1^- 는 다시 수정되어 (4.6)이 된다.

$$X_1^- = (\tilde{\mathbf{S}}_{3,1}^+ + \tilde{\mathbf{S}}_{3,1}^- \tilde{\mathbf{S}}_{4,7}^+) X_1^+ + \tilde{\mathbf{S}}_{3,1}^- \tilde{\mathbf{S}}_{4,7}^- X_{401}^- \quad (4.6)$$

여기서

$$\tilde{\mathbf{S}}_{4,7}^+ = (\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{R}}_4^+ \tilde{\mathbf{S}}_{3,6}^-)^{-1} \tilde{\mathbf{R}}_4^+ \tilde{\mathbf{S}}_{3,6}^+, \quad \tilde{\mathbf{S}}_{4,7}^- = (\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{R}}_4^+ \tilde{\mathbf{S}}_{3,6}^-)^{-1} \tilde{\mathbf{T}}_4^-. \quad (4.7)$$

입사파가 양측으로부터 오지 않고 왼쪽 방향에서만 존재하는 경우 (4.6) 좌변의 둘째 항이 존재하지 않게 된다 ($X_{401}^- = 0$). 그림 6b는 표 2의 “DH2” 지형에 의한 반사율이고 기존 사주에 새로운 사주가 추가되어 최종 4개의 사주로 지형이 구성되고 사주의 추가는 증폭을 크게 하고 피크의 폭을 좁게 한다. 주 피크 주변의 side lobe의 개수 역시 증가하며 이는 (4.5)의 두 성분의 위상차로 인한 것이다. 사주의 개수가 증가하면 상호작용에 의한 성분의 크기는 감소하고 이것으로 인해 주 피크의 크기가 점차 커지게 된다. $2k/l = 2$ 부근에서 반사율과 이를 형성하는 두 성분의 크기 모두 0이 된다. 그래서 하나의 사주로부터 유래된 이 현상이 사주 추가에도 계속되어 제 2 증폭은 거의 없는 것으로 분석된다.

그림 6d는 “G1a” 로 상이한 두 형태의 정현파가 중첩된 사주지형에 대한 반사율로 그림 6c는 이 지형의 첫 2개로 계산한 반사율이다. 지형 정현파의 과장비가 2이므로 주 증폭과 difference resonance가 $2k/l = 1$ 에서 같이 합해져 나타나게 된다. 따라서 이 두 성분을 분리하기가 어렵다. 그림 6a에 비해 그림 6c에서 주 증폭의 피크가 현저하게 이동한 것을 알 수 있다. 이 이동은 하나의 사주지형에 의한 반사율 경향에서도 뚜렷하며 그림에서 기호를 포함한 파란색 실선에 해당한다.

상이한 정현파 중첩 사주 “G3a” 에 대한 본 모형의 결과를 그림 6e과 그림 6f에 나타내었다. 여기서 정현파 과장비는 1.5로 부차적인 추가 증폭은 0.5와 1.5에 위치하게 된다. 이 지형은 형상이 보다 복잡하고 경사도 커서 반사율과 위상차의 형상이 더 복잡하며 주 증폭 피크의 이동이 훨씬 뚜렷하다.

제 5 장 결론

수심이 변하는 2차원 지형에서 지형에 의해 생성되는 선형 산란파를 구하기 위해 역류파형을 포함한 파형연계를 고려한 새로운 변환행렬법을 제시하였다. 이 행렬에 주어진 입사파랑 조건을 곱하면 계단근사 지형에 대한 파형이 연계된 파랑계산이 바로 연계 된다. 변환행렬은 개개의 계단에서 구한 산란행렬로 구성되어 계산속도가 매우 빠르며 복잡한 지형에 대한 파랑변형도 쉽게 구할 수 있는 장점이 있다. 이 기법은 미지수를 늘리면 엄밀해로 수렴하기 때문에 정밀한 파랑변형 계산을 위해 미지수를 최대 643,200까지 사용하였으며 이는 1600개 계단에 200개 역류파형에 대한 사례에 해당된다. 계산소요시간 검증을 통해 모형으로부터 생성된 연립방정식을 direct inversion 방식으로 계산하는 기존 방법보다 월등히 우수한 방법임을 확인하였다. 정현파 형태의 지형에 대한 기존 결과 (Guazzelli *et al.* 1992; O' Hara and Davies, 1993, Chamberlain and Porter, 1995)와 비교하여 아주 정밀한 결과임을 입증하였다.

본 모형은 구성 계단을 여러 개의 세부 그룹으로 나누고 각 그룹에 다수의 계단을 구성하여 각 세부 그룹의 파랑변형을 계산한 후 그룹간의 파형연계법을 사용하여 원하는 계산을 할 수 있으며 최종 결과는 세부 그룹의 구성에 따라 변하지 않는 특성을 갖는다. 그러므로 이는 기존의 Guazzelli *et al.* (1992) 방법을 개선한 것이다. 세부 그룹에 대한 산란행렬은 이를 구성하는 개개의 계단의 산란행렬을 구해 이를 조합하는 방법을 사용하였고 그 최종 결과는 구성 연립방정식의 해와 동일하다. 이렇게 구한 각각의 세부 그룹 산란행렬을 다시 동일한 방법으로 조합하면 구하고자 하는 문제의 최종 산란행렬이 얻어진다. 이 특성은 다수의 정현파로 구성된 지형에서의 파랑변형을 구하는 데 적용하여 그 장점을 예시하였고, 지형의 구성사주 간의 파랑변형 상호작용과 사주의 개수 변화에 따른 반사율 변화를 분석에 아주 효과적인 것으로 평가된다. 지형이 복잡한 경우 Bragg 산란 발생이 역류파형의 역할에 의해 파랑의 주기가 긴 쪽으로 이동하는 현상을 평균수심에 대한 사주진폭의 비, 해저경사 그리고 지형 형상의 복잡 정도를 고려하여 재평가하였다. Davies와 Heathershaw (1984)가 연구한 정현파 사주의 경우 제2 증폭점 부근에서 매우 미약한 반사율을 보이는 원인을 규명하였고, 이 점에서 사주 하나에 의해 생성된 거의 제로 반사율이 새로운 사주가 추가되어도

계속 영향을 주어 낮은 반사율을 보이게 된다. 그리고 계단의 수가 증가하여 많은 계단지형의 경우에는 wide-spacing 근사법으로 계산한 결과는 평면과 근사법의 결과와 거의 같게 되며, 결국 이 때는 wide-spacing 근사법의 장점이 소멸되게 된다.

참고문헌

- 서승남, 전기천, 1992. 해저단에 재형 및 흐름에 의한 역류파랑. 한국해안·해양공학회지, 4(1), 1-9.
- 서승남, 2008a. 산란체법에 의한 다중 계단지형에서의 파랑변형 계산. 한국해안·해양공학회논문집, 한국해안·해양공학회, 20(5), 439-451.
- 서승남, 2008b. 변분근사식과 연계된 산란체법에 의한 파랑변형 계산. 한국해안·해양공학회논문집, 한국해안·해양공학회, 20(6), 553-563.
- 서승남, 2009a. 단일계단 지형에서 변분근사법과 고유함수 전개법에 의한 파랑변형 비교, 한국 해안·해양공학회논문집, 21(2), 91-107.
- 서승남, 2009b. 분할행렬법에 의한 다중 계단지형에서의 파랑변형 계산, 대한토목학회논문집, 29(4B), 377-384.
- 서승남, 2010. 지형변화에 의한 파랑전파모형: 산란체법과 변환행렬법, 한국 해안·해양공학회논문집, 22(3), 163-170.
- 조용식, 이창훈, 1998. 수심이 변하는 지형을 통과하는 파랑의 반사율과 통과율 산정. 대한토목학회논문집, 대한토목학회, 18(II-4), 351-358.
- Abramowitz, M., Stegun, I. A., 1972. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York.
- Gradshteyn, I.S., Ryzhik, I.M., 1980. *Table of integrals, series and products*. Academic Press, Inc., Orlando.
- Athanassoulis, G.A., Belibassakis, K.A. 1999. A consistent coupled-mode theory for the propagation of small-amplitude water waves over variable bathymetry regions. *J. Fluid Mech.* **389**, 273-301.
- Bender, H.J., Dean, R.G. 2003. Wave transformation by two-dimensional bathymetric anomalies with sloped transition. *Coastal Eng.* **50**, 61-84.
- Berkhoff, J.C.W. 1972. Computation of combined refraction-diffraction. *Proc. 13th Conf. on Coastal Eng., ASCE*, **1**, 471-490.
- Chamberlain, P.G., Porter, D. 1995. The modified mild-slope equation. *J. Fluid Mech.* **291**, 393-407.
- Chamberlain, P.G., Porter, D. 2006. Multi-mode approximations to wave

- scattering by an uneven bed. *J. Fluid Mech.* **556**, 421–441.
- Davies, A.G., Heathershaw, A.D. 1984. Surface–wave propagation over sinusoidally varying topography. *J. Fluid Mech.* **144**, 419–443.
- Devillard, P., Dunlop, F., Souillard, B. 1988. Localization of gravity waves on a channel with a random bottom. *J. Fluid Mech.* **186**, 521–538.
- Evans, D.V., Linton, C.M. 1994. On step approximation for water–wave problems. *J. Fluid Mech.* **278**, 229–249.
- Greenberg, M.D. 1978. *Foundations of Applied Mathematics*. Prentice–Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Guazzelli, E., Rey, V., Belzons, M. 1992. Higher–order bragg reflection of gravity surface waves by periodic beds. *J. Fluid Mech.* **245**, 301–317.
- Kirby, J.T. 1986. A general wave equation for waves over rippled beds. . *J. Fluid Mech.* **162**, 171–186
- Kirby, J.T., Dalrymple, R.A. 1983. Propagation of obliquely incident water waves over a trench. *J. Fluid Mech.* **133**, 47–63.
- Massel, S.R. 1993. Extended refraction–diffraction equation for surface waves. *Coastal Eng.* **19**, 97–126.
- Mattioli, R. 1991. Resonant reflection of surface waves by non–sinusoidal bottom undulations. *Applied Ocean Res.* **13**, 49–53.
- Mei, C.C., Stiassnie, M., Yue, D.K.–P. 2005. *Theory and Applications of Ocean Surface Waves*. World Scientific Publishing Co., Singapore.
- Miles, J.W. 1967. Surface–wave scattering matrix for a shelf. *J. Fluid Mech.* **28**, 755–767.
- O’ Hare, T.J., Davies, A.G. 1992. A new models for surface wave propagation over undulating topography. *Coastal Eng.* **18**, 125–266.
- O’ Hare, T.J., Davies, A.G. 1993. A comparison of two models for surface–wave propagation over rapidly varying topography. *Applied Ocean Res.* **15**, 1–11.
- Porter, R., Porter, D. 2000. Water wave scattering by a step of arbitrary profile. *J. Fluid Mech.* **411**, 131–164.
- Porter, R., Porter, D. 2003. Scattered and free waves over periodic beds. *J. Fluid Mech.* **483**, 129–163.
- Porter, D., Staziker D.J. 1995. Extensions of mild–slope equation. *J.*

Fluid Mech. **300**, 367–384.

Rey, V., Belzons, M. and Guazzelli, E., 1992. Propagation of surface gravity waves over a rectangular submerged bar. *J. Fluid Mech.* **235**, 453–479.

Srokosz, M.A., Evans, D.V. 1979. A theory for wave–power absorption by two independently oscillating bodies, *J. Fluid Mech.* **90**, 337–362.

Takano, K. 1960 Effets d' un obstacle parallélépipédique sur la propagation de la houle. *La Houille Blanche* **15**, 247–267.

부 록

부록 1. Transfer matrix of linear water wave scattering over a stepwise bottom



Transfer matrix of linear water wave scattering over a stepwise bottom



Seung-Nam Seo

Coastal Development & Ocean Energy Research Division, Korea Institute of Ocean Science and Technology, Ansan 426–744, Republic of Korea
Ocean Science & Technology School, Korea Maritime and Ocean University, Busan 606–791, Republic of Korea

ARTICLE INFO

Article history:

Received 20 September 2013
Received in revised form 23 January 2014
Accepted 27 January 2014
Available online xxxx

Keywords:

Water wave scattering
Stepwise approximation
Transfer matrix
Evanescent modes
Reflection coefficient

ABSTRACT

For a two-dimensional linear wave scattering problem, a new transfer matrix incorporating evanescent modes is developed, from which the solution of a scattered wave field over a stepwise topography is directly obtained. The present method is shown to be capable of solving practical scattering problems with complicated bedforms, for which application of the conventional methods has been fairly limited. Highly accurate numerical solutions for sufficiently large systems are presented, and the computational efficiency of the present method is demonstrated. The interaction of bars in periodic beds is examined, and changes in the reflection coefficient with increasing number of bars are illustrated.

© 2014 The Author. Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

For a varying topography in which the change of depth within a wavelength is appreciable, reflected waves can no longer be neglected, as waves are scattered by the undulating bottom. This interaction between surface water waves and periodic bottom topographies has been studied extensively. The main issue has been focused on the Bragg resonance reflection of incident waves when the surface wavelength is about twice the wavelength of the bed profile (Mei et al., 2005).

When the bottom is rapidly varying with steep slopes, the evanescent modes must be included to predict wave scattering accurately. These modes represent local effects, but through mode coupling, they affect the propagating modes. The inclusion of evanescent modes gives rise to an additional set of coupled equations, from which the accurate higher-order Bragg resonances and the clear shift of Bragg peaks towards lower wavenumbers are obtained (Guazzelli et al., 1992; Mattioli, 1991).

The stepwise approximation, in which a varying bottom is approximated by a series of steps, has proved successful for wave scattering problems. The solution of each region of constant depth in the approximation can be expressed as an eigenfunction expansion. To determine unknown coefficients in the expansion, matching conditions are used at every boundary of the intervening shelves to ensure continuity of the fluid velocity and pressure over the depth. For an accurate solution, the number of both steps and evanescent modes should be increased to a sufficient level. By increasing the number of unknowns, a more accurate solution can be obtained, but large amounts of computational effort are also required. Since the simple direct inversion of a matrix uses a large amount of memory as well, the conventional method is not suitable, especially for a large system of equations. In spite of several efforts

to overcome this difficulty, the limitation on increasing the number of unknowns has still remained. Therefore, a new method is needed to alleviate the limitation appreciably.

Devillard et al. (1988) devised a transition matrix method based on both the scattering matrix by Miles' (1967) variational approximation and the wide-spacing approximation by Srokosz and Evans (1979). The propagating modes on either side of a shelf are related to a 2×2 transition matrix expressed in analytical form. Then, the scattering property is obtained by successive multiplication of the transition matrices corresponding to each shelf. This idea was adopted by Evans and Linton (1994) to find the scattering properties in a transformed domain by a conformal mapping technique. O'Hare and Davies (1993) applied the plane wave approximation, which is a simplified version of the wide-spacing approximation, to predict the scattering of periodic bedforms. Their model provides good predictions for sinusoidal beds, but poor predictions for higher-order resonances of doubly sinusoidal beds. This strongly implies the inclusion of evanescent modes in the scattering of complicated topographies. Guazzelli et al. (1992) developed a hybrid wide-spacing approximation by subdividing a bed into smaller subsystems of steps to enhance the ability of solving fairly large linear systems with a reasonable amount of effort, although it somewhat sacrifices the accuracy of the solution. Coupling between all wave modes is taken into account in each subsystem, but the subsystems are not coupled by the evanescent modes. Since the solution is affected by the choice of subsystems, they indicated that an adequate subdivision into subsystems must be selected. Rey et al. (1992) presented both experimental and numerical results of the propagation of normally incident waves over a rectangular submerged bar using the fully coupled model by Takano (1960) and Kirby and Dalrymple (1983) and the approximate model by Devillard et al. (1988).

Another line of approach to successfully predict linear wave scattering is based on the mild slope approximation. After [Berkhoff \(1972\)](#) introduced the mild slope equation, several extensions have been made aiming at steeper slopes and more complex bed shapes. The extended mild slope equation by [Kirby \(1986\)](#) and the modified mild slope equation by [Chamberlain and Porter \(1995\)](#) produced accurate prediction for sinusoidal beds where the mild slope equation failed. [Massel \(1993\)](#) and [Porter and Staziker \(1995\)](#) presented multi-mode extensions to include additional evanescent modes to cope with steeper slopes. [Athanassoulis and Belibassakis \(1999\)](#) and [Chamberlain and Porter \(2006\)](#) showed that a sloping bed mode added to the multi-mode extension improves the convergence rate of the approximation.

Recently, [Bender and Dean \(2003\)](#) applied the stepwise approximation to study wave scattering by 2-dimensional trenches and sills with sloped transitions. They focused on the effects of sloped transition on the wave scattering and found that the sloped transitions led to a reduction in the reflection coefficients. Their numerical results of the stepwise approximation were compared favorably with those from other shallow water models. In a numerical experiment, [Bender and Dean \(2003\)](#) used at most 40 steps and 16 evanescent modes, while [Guazzelli et al. \(1992\)](#) used 60 steps and at most 4 evanescent modes. Consequently, a limited number of unknowns have been used in the approximation, and solutions have been compared mainly to available laboratory data. For better understanding of the stepwise approximation, the accuracy of the solution has to be tested with increasing unknowns to a sufficient level.

Since most of the computing time in the conventional method is spent in inverting the matrix of linear equations, it is crucial to find an effective way to use a number of smaller matrices to replace the one corresponding large matrix. To use the smallest matrix for the inversion, our aim is to construct the solution by summing all scattering matrices of individual steps. To this end, a transfer matrix is developed not only to significantly relieve the limitation of the previous models, but also to obtain the full solution of the two-dimensional linear wave scattering problem without any restriction except for the stepwise approximation. We present highly accurate numerical solutions for wave scattering by variable topography and reassess the results. Extensive accuracy tests of the solution are performed, and for multiple scattering between bars, we examine changes in the reflection coefficient and its contributions with increasing number of bars in periodic beds.

2. Eigenfunction expansion method

For linear water waves with angular frequency ω , we seek a complex velocity potential $\phi(x, z) \exp(-i\omega t)$. A smooth bottom connecting two regions of constant depth is approximated by M consecutive steps with $(M + 1)$ horizontal shelves. Although the length of the first and last shelves may not be finite, the intervening shelves are of finite length. For a better approximation to a given bed profile, the number of steps should be increased.

Because the depth h_i over the i th shelf ($x_{i-1} < x < x_i$) is constant, the solution can be expressed by an eigenfunction expansion in the following form:

$$\phi_i = \left(p_i^+ e^{ik_{i,0}x} + p_i^- e^{-ik_{i,0}x} \right) \cosh k_{i,0}(z + h_i) + \sum_{j=1}^{\infty} \left[s_{i,j}^+ e^{-k_{i,j}(x-x_{i-1})} + s_{i,j}^- e^{k_{i,j}(x_i-x)} \right] \cos k_{i,j}(z + h_i), \quad (2.1)$$

where the propagating mode amplitude p_i^\pm and evanescent mode amplitudes $s_{i,j}^\pm$ are to be determined, and the superscript \pm denotes the wave propagation direction. $k_{i,j}$ are the solutions of the dispersion relationship.

$$\omega^2 = gk_{i,0} \tanh k_{i,0}h_i = -gk_{i,j} \tan k_{i,j}h_i. \quad (2.2)$$

The eigenfunctions are given by

$$f_{i,0} = \cosh k_{i,0}(z + h_i), \quad f_{i,n} = \cos k_{i,j}(z + h_i), \quad (2.3)$$

which form a complete and orthogonal set for the interval $(-h_i, 0)$.

To determine the unknown amplitudes in Eq. (2.1), the matching conditions are imposed at each boundary separating adjacent regions.

$$\begin{cases} \phi_i = \phi_{i+1} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial x} = \frac{\partial \phi_{i+1}}{\partial x}; x = x_i, -\min(h_i, h_{i+1}) \leq z \leq 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

For computational purposes, the infinite series in Eq. (2.1) is truncated into a finite series of N terms. Substituting Eq. (2.1) into Eq. (2.4) produces a residual due to the truncation. Following the method of weighted residuals by [Kirby and Dalrymple \(1983\)](#), we have $2(N + 1)$ linear algebraic equations from the matching conditions at $x = x_i$,

$$\begin{cases} \int_{-h_i}^0 \phi_i f_{i,j}^s dz = \int_{-h_i}^0 \phi_{i+1} f_{i,j}^s dz & ; x = x_i, h_s \equiv \min(h_i, h_{i+1}), \\ \int_{-h_i}^0 \frac{\partial \phi_i}{\partial x} f_{i,j}^d dz = \int_{-h_{i+1}}^0 \frac{\partial \phi_{i+1}}{\partial x} f_{i,j}^d dz \end{cases} \quad (2.5)$$

where $f_{i,j}^s$ denotes an eigenfunction in the shallower shelf, and $f_{i,j}^d$ is that in the deeper shelf. We make use of the shift of the integration limit in the velocity condition using no contributions from the vertical wall of the step.

Evaluation of the integrals in Eq. (2.5) gives a linear equation system. In this study, the unknown vector \mathbf{X}_i is regrouped into two sub-vectors of $(N + 1)$ elements.

$$\mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} X_i^- \\ X_i^+ \end{bmatrix}, \quad X_i^\pm = \{p_i^\pm, s_{i,1}^\pm, \dots, s_{i,N}^\pm\}^T. \quad (2.6)$$

Then, the linear system can be written in matrix form as

$$\mathbf{A}_i \mathbf{X}_{i-1} + \mathbf{B}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{C}_i \mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{0}, \quad (2.7)$$

where matrices \mathbf{A}_i , \mathbf{B}_i , and \mathbf{C}_i have four sub-matrices of order $(N + 1)$ elements.

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_{i,12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{i,22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{i,11} & \mathbf{B}_{i,12} \\ \mathbf{B}_{i,21} & \mathbf{B}_{i,22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{i,11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{i,21} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

For M steps and N evanescent modes, $2M(N + 1)$ linear equations are formed. When the number of both steps and evanescent modes is increased for an accurate solution, the number of equations to be solved increases much more rapidly. To circumvent the difficulties in solving a large system of equations, we present a new method in which the solution is built using the individual scattering matrices of each step. More importantly, we demonstrate that the present method is another way of exactly solving the scattering problem of a very large system of equations. [Table 1](#) shows the computed CPU times of both the conventional direct inversion and the present method for two wave inputs. It is evident that the present method drastically reduces the computing time, especially for the case of a large number of unknowns, in which the direct inversion method is impractical as shown.

After obtaining all velocity potential amplitudes, surface elevation can be computed from the dynamic free surface condition. From the velocity potential representation in Eq. (2.1), the reflection coefficient K_R and transmission coefficient K_T are given by

$$K_R = \frac{|p_1^-|}{|p_1^+|}, \quad K_T = \frac{|p_{M+1}^+| \cosh k_{M+1}h_{M+1}}{|p_1^+| \cosh k_1h_1}. \quad (2.9)$$

Table 1
Computed CPU times of conventional direct inversion and present method for two wave inputs.

M steps	N modes	No. of unknowns	CPU time (sec)	
			Direct inversion	Present method
100	0	200	0.10	0.00
	1	400	0.76	0.02
	5	1200	32.57	0.03
	10	2200	243.38	0.16
	20	4200	1701.60	0.76
	200	40,200	–	626.61

‘–’denotes no result.

3. Transfer and scattering matrices

In this section, we begin by finding the simplest solution for the scattering problem of a single step and build up towards a more complicated one for a multi-step. As mentioned, we shall show how to construct the transfer matrix of a multi-step using the pre-calculated scattering matrices successively.

3.1. A single step

In previous studies, shelf lengths of a single step were assumed to be infinite so that only the propagating modes of incident waves coming from $x \rightarrow \pm \infty$ can be encountered around its depth discontinuity. However, we consider a more general case in which the shelf length can be finite and incident waves including evanescent modes are given at the both ends.

Combining the incident waves in Eq. (2.7) and transposing them, the equation can be rewritten in the following form

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{X}_1 = \mathbf{D}_1 \tilde{\mathbf{X}}_1 \equiv \mathbf{X}_1^{\text{in}}, \quad (3.1)$$

with

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1,11} & \mathbf{B}_{1,12} \\ \mathbf{B}_{1,21} & \mathbf{B}_{1,22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_1 = - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,12} & \mathbf{C}_{1,11} \\ \mathbf{A}_{1,22} & \mathbf{C}_{1,21} \end{bmatrix}; \quad (3.2)$$

$$\mathbf{X}_1 = \begin{Bmatrix} X_1^- \\ X_2^+ \end{Bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{X}}_1 = \begin{Bmatrix} X_1^+ \\ X_2^- \end{Bmatrix}.$$

The elements in both \mathbf{B}_1 and \mathbf{D}_1 are computable from inner products of the eigenfunction and weight function. As an example for $h_1 < h_2$, from the velocity matching condition ($m = 1, \dots, N + 1$), we have the elements of the matrices \mathbf{B}_1 and \mathbf{D}_1 .

$$b_{m,n} = \begin{cases} -ik_{1,0} e^{-ik_{1,0}x_1} \int_{-h_1}^0 f_{1,0} f_{2,\bar{m}} dz & (n = 1), \\ k_{1,j} \int_{-h_1}^0 f_{1,j} f_{2,\bar{m}} dz & (n = j + 1), \\ -ik_{2,0} e^{ik_{2,0}x_1} \int_{-h_2}^0 f_{2,0} f_{2,\bar{m}} dz & (n = N + 2), \\ k_{2,j} \int_{-h_2}^0 f_{2,j} f_{2,\bar{m}} dz & (n = j + N + 2). \end{cases} \quad (3.3)$$

$$d_{m,n} = \begin{cases} -ik_{1,0} e^{ik_{1,0}x_1} \int_{-h_1}^0 f_{1,0} f_{2,\bar{m}} dz & (n = 1), \\ k_{1,j} e^{-k_{1,j}\Delta x_1} \int_{-h_1}^0 f_{1,j} f_{2,\bar{m}} dz & (n = j + 1), \\ -ik_{2,0} e^{-ik_{2,0}x_1} \int_{-h_2}^0 f_{2,0} f_{2,\bar{m}} dz & (n = N + 2), \\ k_{2,j} e^{-k_{2,j}\Delta x_2} \int_{-h_2}^0 f_{2,j} f_{2,\bar{m}} dz & (n = j + N + 2). \end{cases}$$

The pressure matching condition ($m = N + 2, \dots, 2N + 2$) produces

$$b_{m,n} = \begin{cases} e^{-ik_{1,0}x_1} \int_{-h_1}^0 f_{1,0} f_{1,\bar{m}} dz & (n = 1), \\ \int_{-h_1}^0 f_{1,j} f_{1,\bar{m}} dz & (n = j + 1), \\ -e^{ik_{2,0}x_1} \int_{-h_1}^0 f_{2,0} f_{1,\bar{m}} dz & (n = N + 2), \\ -\int_{-h_1}^0 f_{2,j} f_{1,\bar{m}} dz, & (n = j + N + 2), \end{cases} \quad (3.4)$$

$$d_{m,n} = \begin{cases} -e^{ik_{1,0}x_1} \int_{-h_1}^0 f_{1,0} f_{1,\bar{m}} dz & (n = 1), \\ -e^{-k_{1,j}\Delta x_1} \int_{-h_1}^0 f_{1,j} f_{1,\bar{m}} dz & (n = j + 1), \\ e^{-ik_{2,0}x_1} \int_{-h_1}^0 f_{2,0} f_{1,\bar{m}} dz & (n = N + 2), \\ e^{-k_{2,j}\Delta x_2} \int_{-h_1}^0 f_{2,j} f_{1,\bar{m}} dz & (n = j + N + 2), \end{cases}$$

where $j = 1, \dots, N$. The shelf length is given by $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, ($i = 1, 2$) and

$$\bar{m} = \begin{cases} m-1, & m \leq N+1 \\ m-N-2, & m > N+1 \end{cases}. \quad (3.5)$$

It is evident from Eqs. (3.3) and (3.4) that the evanescent modes are coupled with the propagating modes. Particularly, the shelf length affects the evanescent modes of the incident waves by $\exp(-k_{1,j}\Delta x_i)$, which eventually has an effect on the scattered waves. When the length is large enough, all contributions of evanescent modes virtually vanish in \mathbf{X}_1^{in} . On the other hand, when the incident waves are exclusively given by propagating modes as in the plane wave, the same result happens to \mathbf{X}_1^{in} , even though the shelf length is not long enough. Thus, for a step of infinite shelf length, incident waves are equivalent to plane waves.

By solving Eq. (3.1), the scattering matrix of a single step $\mathbf{S}_1 = [\mathbf{S}_1^+ \mathbf{S}_1^-]$ is obtained.

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{D}_1 \tilde{\mathbf{X}}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^+ & \mathbf{T}_1^- \\ \mathbf{T}_1^+ & \mathbf{R}_1^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^+ \\ X_2^- \end{Bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{1,1}^+ & \mathbf{S}_{1,1}^- \\ \mathbf{S}_{1,2}^+ & \mathbf{S}_{1,2}^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^+ \\ X_2^- \end{Bmatrix}. \quad (3.6)$$

The matrices \mathbf{R}_1^\pm and \mathbf{T}_1^\pm denote coefficients of the reflected and transmitted waves, respectively. For a single step, the transfer matrix is interchangeable with the scattering matrix. We can see from Eq. (3.6) that multiplying the transfer matrix by incident waves yields the solution of scattered waves. Furthermore, the transfer matrix reflects the nature of the system regarding topographic features and wave properties. Since the scattering matrix exists even for a special step of equal depth, where only the transmitted wave is formed, \mathbf{B}_1^{-1} always exists. When 1 and 2 are replaced by i and $i + 1$, Eq. (3.6) gives the scattered wave equations of the i th step.

When the solution \mathbf{X}_1 of Eq. (3.6) is substituted into Eq. (2.1), it can be observed that the produced evanescent modes decay exponentially away from depth discontinuities. If a shelf length is so large that all evanescent modes are negligibly attenuated inside the shelf, only the propagating modes arrive at the neighboring step. Devillard et al. (1988) adopted this wide-spacing approximation and applied it to every step in a stepped bed to study Anderson localization to water waves over a random bottom.

3.2. Two steps

In a bed with two steps, a multiple scattering between the steps is formed, which is absent in the case of a single step. Linear equations

for two steps are directly obtained from Eq. (2.7), and they can be given by the scattering matrix form of each step.

$$\begin{cases} X_1^- = \mathbf{R}_1^+ X_1^+ + \mathbf{T}_1^- X_2^- \\ X_2^- = \mathbf{T}_1^+ X_1^+ + \mathbf{R}_1^- X_2^- \\ X_2^+ = \mathbf{R}_2^+ X_2^- + \mathbf{T}_2^- X_3^- \\ X_3^- = \mathbf{T}_2^+ X_2^- + \mathbf{R}_2^+ X_3^- \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1^- \\ X_2^- \\ X_2^+ \\ X_3^- \end{cases} = [\mathbf{S}_2^+ \quad \mathbf{S}_2^-] \begin{cases} X_1^+ \\ X_3^- \end{cases}. \quad (3.7)$$

Here, the incident waves with amplitudes X_1^+ and X_3^- are given, and the other amplitudes are to be determined. Similarly to a single step, the unknowns can be expressed by the transfer matrix, $\mathbf{S}_2 = [\mathbf{S}_2^+ \quad \mathbf{S}_2^-]$, acting on the incident waves. It is evident from Eq. (3.7) that each of them has four sub-matrices of order $(N + 1)$.

$$\mathbf{S}_2^+ = [\mathbf{S}_{2,1}^+ \quad \mathbf{S}_{2,2}^+ \quad \mathbf{S}_{2,3}^+ \quad \mathbf{S}_{2,4}^+]^T; \quad \mathbf{S}_2^- = [\mathbf{S}_{2,1}^- \quad \mathbf{S}_{2,2}^- \quad \mathbf{S}_{2,3}^- \quad \mathbf{S}_{2,4}^-]^T. \quad (3.8)$$

By solving Eq. (3.7) straightforwardly, we find

$$\begin{aligned} X_2^- &= (\mathbf{I} - \mathbf{R}_2^+ \mathbf{R}_1^-)^{-1} (\mathbf{R}_2^+ \mathbf{T}_1^+ X_1^+ + \mathbf{T}_2^- X_3^-) = \mathbf{S}_{2,3}^+ X_1^+ + \mathbf{S}_{2,3}^- X_3^-, \\ X_2^+ &= (\mathbf{T}_1^+ + \mathbf{R}_1^- \mathbf{S}_{2,3}^+) X_1^+ + \mathbf{R}_1^- \mathbf{S}_{2,3}^- X_3^- = \mathbf{S}_{2,2}^+ X_1^+ + \mathbf{S}_{2,2}^- X_3^-, \\ X_3^- &= \mathbf{T}_2^+ \mathbf{S}_{2,2}^+ X_1^+ + (\mathbf{T}_2^+ \mathbf{S}_{2,2}^- + \mathbf{R}_2^+) X_3^- = \mathbf{S}_{2,4}^+ X_1^+ + \mathbf{S}_{2,4}^- X_3^-, \\ X_1^- &= (\mathbf{R}_1^+ + \mathbf{T}_1^- \mathbf{S}_{2,3}^+) X_1^+ + \mathbf{T}_1^- \mathbf{S}_{2,3}^- X_3^- = \mathbf{S}_{2,1}^+ X_1^+ + \mathbf{S}_{2,1}^- X_3^-, \end{aligned} \quad (3.9)$$

where \mathbf{I} is the identity matrix of order $(N + 1)$. The scattered waves propagating away from a variable bottom profile are X_1^- and X_3^+ .

By extending the argument of a long wave by Mei et al. (2005), the physical features imbedded in Eq. (3.9) can be explained. For simplicity, we examine a scattering process due to a right-going incident wave only. When the incident wave of X_1^+ arrives at the first step $x = x_1$, some of the wave energy with a wave $\mathbf{T}_1^+ X_1^+$ is transmitted into the second shelf, and the rest, $\mathbf{R}_1^+ X_1^+$, is reflected. As soon as this transmitted wave reaches the second step, it undergoes the same scattering process: some energy $\mathbf{T}_2^+ \mathbf{T}_1^+ X_1^+$ is transmitted to the third shelf and the rest, $\mathbf{R}_2^+ \mathbf{T}_1^+ X_1^+$, is reflected back toward the first step. Upon reaching the first step, the back-reflected wave is again split into reflected and transmitted waves to produce $\mathbf{R}_1^- \mathbf{R}_2^+ \mathbf{T}_1^+ X_1^+$ and $\mathbf{T}_1^- \mathbf{R}_2^+ \mathbf{T}_1^+ X_1^+$, respectively. This back-and-forth scattering process is repeated infinitely in the second shelf, as shown in Fig. 1.

Summing up all of the left-going waves in the first shelf, we have

$$\begin{aligned} X_1^- &= \mathbf{R}_1^+ X_1^+ + \mathbf{T}_1^- \mathbf{R}_2^+ \mathbf{T}_1^+ X_1^+ + \mathbf{T}_1^- \mathbf{R}_2^+ \mathbf{R}_1^- \mathbf{R}_2^+ \mathbf{T}_1^+ X_1^+ + \dots \\ &= [\mathbf{R}_1^+ + \mathbf{T}_1^- (\mathbf{I} - \mathbf{R}_2^+ \mathbf{R}_1^-)^{-1} \mathbf{R}_2^+ \mathbf{T}_1^+] X_1^+, \end{aligned} \quad (3.10)$$

where the Neumann series identity is used in the case of a linear matrix $\mathbf{R}_2^+ \mathbf{R}_1^-$ with norm less than unity (Greenberg, 1978). Similarly, the other scattered wave amplitudes can be obtained. When the response of the left-going incident wave is included, it results in Eq. (3.9). It is now

evident that the mathematical solution in Eq. (3.9) is the sum of the infinite series produced by multiple scattering.

3.3. Multiple steps

Following the procedure in the previous subsection successively, the scattered waves for a bedform of m steps can be easily obtained. The transfer matrix of the first $(m - 1)$ steps is known in the previous computation, as is the scattering matrix of the m th step. Hence, this can be essentially treated as a multiple scattering between two scatterers, with one being composed of the first $(m - 1)$ steps and the last one. Then, for a given m steps, linear algebraic equations can be written as

$$\begin{cases} X_1^- = \mathbf{S}_{m-1,1}^+ X_1^+ + \mathbf{S}_{m-1,1}^- X_m^-, \\ X_2^- = \mathbf{S}_{m-1,2}^+ X_1^+ + \mathbf{S}_{m-1,2}^- X_m^-, \\ \vdots \\ X_{m-1}^- = \mathbf{S}_{m-1,2m-3}^+ X_1^+ + \mathbf{S}_{m-1,2m-3}^- X_m^-, \\ X_m^- = \mathbf{S}_{m-1,2m-2}^+ X_1^+ + \mathbf{S}_{m-1,2m-2}^- X_m^-, \\ X_m^+ = \mathbf{R}_m^+ X_m^- + \mathbf{T}_m^- X_{m+1}^-, \\ X_{m+1}^+ = \mathbf{T}_m^+ X_m^- + \mathbf{R}_m^- X_{m+1}^-. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1^- \\ X_2^- \\ \vdots \\ X_m^- \\ X_m^+ \\ X_{m+1}^+ \end{cases} = [\mathbf{S}_m^+ \quad \mathbf{S}_m^-] \begin{cases} X_1^+ \\ X_{m+1}^+ \end{cases}. \quad (3.11)$$

As shown in Eq. (3.11), the unknown wave amplitudes are weakly coupled because of the first $(m - 1)$ steps, where waves in each shelf are expressed in terms of X_1^+ and X_m^- . As soon as X_m^- is expressed by the incident waves X_1^+ and X_{m+1}^+ , all elements of the first $m - 1$ steps in the transfer matrix are readily obtained. Solving the third and second from the last in the simultaneous equations gives

$$\begin{aligned} X_m^- &= (\mathbf{I} - \mathbf{R}_m^+ \mathbf{S}_{m-1,2m-2}^-)^{-1} \mathbf{R}_m^+ \mathbf{S}_{m-1,2m-2}^+ X_1^+ + (\mathbf{I} - \mathbf{R}_m^+ \mathbf{S}_{m-1,2m-2}^-)^{-1} \mathbf{T}_m^- X_{m+1}^+ \\ &\equiv \mathbf{S}_{m,2m-1}^+ X_1^+ + \mathbf{S}_{m,2m-1}^- X_{m+1}^+. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Substituting X_m^- into the equations, the first $2(m - 1)$ elements of the transfer matrix are obtained.

$$\mathbf{S}_{m,i}^+ = \mathbf{S}_{m-1,i}^+ + \mathbf{S}_{m-1,i}^- \mathbf{S}_{m,2m-1}^+; \quad \mathbf{S}_{m,i}^- = \mathbf{S}_{m-1,i}^- \mathbf{S}_{m,2m-1}^- \quad (i = 1, \dots, 2m-2). \quad (3.13)$$

The left-going scattered wave amplitude is given from Eq. (3.13) by

$$X_1^- = (\mathbf{S}_{m-1,1}^+ + \mathbf{S}_{m-1,1}^- \mathbf{S}_{m,2m-1}^+) X_1^+ + \mathbf{S}_{m-1,1}^- \mathbf{S}_{m,2m-1}^- X_{m+1}^+. \quad (3.14)$$

Using X_m^+ computed from Eq. (3.13), the right-going scattered wave amplitude becomes

$$X_{m+1}^+ = \mathbf{T}_m^+ \mathbf{S}_{m,2m-2}^+ X_1^+ + (\mathbf{T}_m^+ \mathbf{S}_{m,2m-2}^- + \mathbf{R}_m^-) X_{m+1}^- \equiv \mathbf{S}_{m,2m}^+ X_1^+ + \mathbf{S}_{m,2m}^- X_{m+1}^-. \quad (3.15)$$

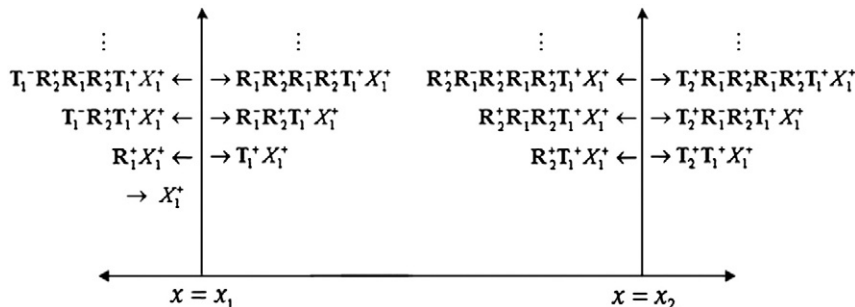


Fig. 1. Multiple scattering with evanescent modes in a bed of two steps for a right-going incident wave X_1^+ .

In most of cases, we are interested in the whole scattering matrix consisting of both Eqs. (3.14) and (3.15). In this case, only the scattered wave amplitudes, X_m^+ and X_{m+1}^+ , need to be computed and saved in memory for the next computation, which reduces the computation significantly. Furthermore, it enables the present method to efficiently obtain solutions of practical scattering problems where a bottom is composed of a large number of steps, and sufficient evanescent modes are incorporated.

For $m = 1$, it can be readily shown that Eqs. (3.12)–(3.15) reduce to Eq. (3.9). It should be noted that the matrix size to be inverted in Eq. (3.12) is $N + 1$, which is half the size of the matrix of the single step. This makes the present method very effective in computation. Besides the computational advantages, however, the present method has additional flexibility compared to the method of subsystems used by Guazzelli et al. (1992). In contrast to the previous method, it is not necessarily limited to use the wide-spacing approximation between the subsystems, nor is it affected by the choice of subdivision locations. For each subsystem, the scattering matrix can be efficiently computed as described above, which now plays a role of that from a single step. Each subsystem is treated as a scatterer like with a single step. Repeating the same solution procedure in Eqs. (3.12)–(3.15) gives the scattered waves by a given topography, and they are expressed by Eqs. (3.14) and (3.15).

Neglecting the effect of evanescent modes, the solution of the plane wave approximation is obtained from Eqs. (3.12)–(3.15) with $N = 0$. For a given $N \geq 1$, however, we can have wide-spacing approximation, hybrid wide-spacing approximation, or the full method. Scattered waves for the wide-spacing approximation can be obtained by simply taking elements for the propagation mode from all scattering matrices of each step and using the same procedure above. Similarly, in the hybrid wide-spacing approximation, elements of the propagation mode from all scattering matrices of every subsystem are used to obtain the scattered waves. Therefore these solutions are approximations to the full method.

4. Numerical results

To verify the present model, numerical results are compared to existing laboratory data and previous results for a symmetric hump and periodic bed profiles. For this purpose, we consider two-dimensional scattering problems by plane wave incident on a given bedform $h(x)$. The varying profile is confined to a finite interval and connected to two regions of constant depth.

A symmetric hump with width λ on an otherwise flat bed was considered by Porter and Staziker (1995), which is given by:

$$h(x) = h_0 \left[2 \left(\frac{x}{\lambda} \right)^2 - 2 \frac{x}{\lambda} + 1 \right], \quad 0 \leq x \leq \lambda. \tag{4.1}$$

As $\omega^2 \lambda / g \rightarrow 0$, the topography becomes a thin barrier with height that is half of the still water depth, h_0 . Chamberlain and Porter (2006) also presented numerical results for this problem using a multi-mode mild slope approximation. Fig. 2 shows a comparison of the reflection coefficients for the problem plotted against the dimensionless width $\omega^2 \lambda / g$. The symbols are results from the method of Porter and Porter (2000), which solves the full linear problem to any accuracy. This figure clearly shows the accuracy of the present method, and it is evident that for small values of $\omega^2 \lambda / g$ corresponding to steep slopes, a larger number of evanescent modes are needed to obtain an accurate result. The hump profile is approximated by 100 equally spaced steps. Both 10 and 50 evanescent modes are used for the computation. To reduce round-off error, the double precision is used in all computations.

The sinusoidal bed considered by Davies and Heathershaw (1984) is given by

$$h(x) = h_0 - b \sin(lx), \quad 0 \leq x \leq 2\pi m / l, \tag{4.2}$$

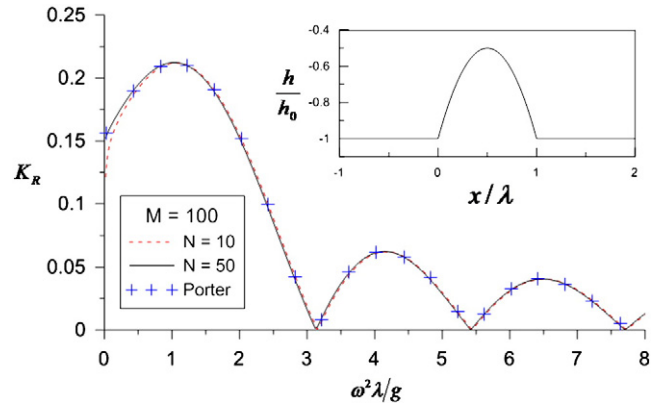


Fig. 2. Comparison of reflection coefficients for the hump topography.

where h_0 is the mean depth, n the number of sinusoidal bars, b the bar amplitude, and l the bar wavenumber. The doubly sinusoidal bed used by Guazzelli et al. (1992) is defined by

$$h(x) = h_0 - b [\sin(lx) + \sin(mx)], \quad 0 \leq x \leq 2\pi m / l, \tag{4.3}$$

where m is the ratio of the larger and smaller bar wavelengths. Here, each bar is taken as a subsystem, and the intervening adjacent bars share a common shelf. The parameters of the sinusoidal beds in Eqs. (4.2) and (4.3) are listed in Table 2. An incident plane wave of unit amplitude coming from $x \rightarrow -\infty$ is considered.

In order to check the accuracy of the results, convergence tests are performed with increasing evanescent modes. Table 3 shows the results for the “DH2” bed at resonance peaks corresponding to $2k/l = 1$ and 2. To demonstrate the capability of the present method in handling a very large system, we increase the numbers of steps and modes to 1600 and 200, respectively. For the case of a fixed number of steps, the sequence of solutions converges to a value depending on the step number as the mode number increases. When both the numbers of steps and modes are increased, a convergent solution can eventually be obtained.

For the sinusoidal beds considered by Davies and Heathershaw (1984), previous studies reported that second-order resonance occurs near $2k/l = 2$ with a sizable magnitude (Chamberlain and Porter, 1995; O’Hare and Davies, 1993). However, the more accurate model by Porter and Porter (2003) revealed very small reflection at the resonance point. We will analyze it in detail at the end of this section.

Fig. 3 shows the computed reflection coefficients for the sinusoidal beds in Table 2 with laboratory experiment data by Davies and Heathershaw (1984). In order to examine the effect of both mode and step numbers on the results, two settings are used in the computation. The red dashed line indicates the result of 10 modes with 100 steps per bar wavelength, and the solid line is for 50 modes with 400 steps. The two lines are identical at this graph resolution, and it is clearly

Table 2
Parameters of bed configuration for periodic bars.

Bed type	Case	h_0 (cm)	b	$2\pi/l$	n	m
Sinusoidal	DH1	15.6	5	100	2	–
	DH2	15.6	5	100	4	–
	DH3	31.2	5	100	10	–
Doubly sinusoidal	G1a	2.5	1	12	4	2
	G1c	4	1	12	4	2
	G2a	2.5	0.5	6	4	1.5
	G2c	4	0.5	6	4	1.5
	G3a	2.5	1	6	4	1.5
	G3c	4	1	6	4	1.5

Table 3
Convergence tests with increasing evanescent modes for the DH2 bed form listed in Table 2.

M steps	N modes	K_R		M steps	N modes	K_R		
		$2k/l = 1$	$2k/l = 2$			$2k/l = 1$	$2k/l = 2$	
100	0	0.74161	0.07987	400	0	0.74606	0.08167	
	1	0.74113	0.03805		1	0.74367	0.04132	
	10	0.73797	0.05420		10	0.74127	0.03760	
	30	0.73751	0.05391		30	0.74072	0.03967	
	50	0.73746	0.05410		50	0.74056	0.04008	
	100	0.73744	0.05415		100	0.74052	0.04005	
800	0	0.73743	0.05417	200	0	0.74050	0.04005	
	1	0.74669	0.08180		1600	0	0.74700	0.08184
	1	0.74399	0.04172		1	0.74413	0.04190	
	10	0.74151	0.03718		10	0.74159	0.03708	
	30	0.74113	0.03789		30	0.74125	0.03752	
	50	0.74100	0.03833		50	0.74117	0.03769	
100	0.74088	0.03866	100	0.74108	0.03795			
200	0.74086	0.03865	200	0.74102	0.03809			

shown that the reflection coefficient is close to zero at a point near $2k/l = 2$. The bed slope of sinusoidal beds is small, so that even plane wave approximation can give good results except near $2k/l = 2$ (O'Hare and Davies, 1993). As the number of bars increases, a slight shift of the first-order resonance peak towards low frequency becomes apparent.

Fig. 4 shows a comparison of the reflection coefficients for the doubly sinusoidal beds considered by Guazzelli et al. (1992). All beds are composed of four bars. In these beds, the ratio of sinusoidal bed components m creates additional higher-order resonances referred to as "difference resonance" near $2k/l = (m - 1)$ and "sum resonance" near $2k/l = (m + 1)$, as described by previous studies (Guazzelli et al.,

1992; O'Hare and Davies, 1993). For the beds of $m = 1.5$, a significant amount of the difference resonance is detected, as shown in Fig. 4c–f. In the computation, the same arrangements as before are used. When the relative bar amplitude ratio defined by b/h_0 is large, the shift of resonance peaks is more apparent, as shown in Fig. 4a in comparison with Fig. 4b. Another factor to affect the shift is the bed slope, which can be seen in Fig. 4e against Fig. 4c.

The combined effect of more complicated bed shape and the steeper slope reduces the accuracy of results in simple models, as shown in Fig. 5. O'Hare and Davies (1993) analyzed the shortcoming due to the exclusion of evanescent modes. In Fig. 4, both results show good agreement with the experiment data, and the two lines are nearly identical except for a few intervals showing slight discrepancy, which indicates the combined effect of complicated bed shape and steep slope. Fig. 4a is very close to Porter and Porter's (2003) figure 6 rather than Athanassoulis and Belibassakis' (1999) figure 8.

Devillard et al. (1988) applied wide-spacing approximation under a special condition where every horizontal shelf length is large compared to the local wavelength above it. Later O'Hare and Davies (1992) showed that when the ratio of each step height to the local water depth is less than 0.02, the wide-spacing approximation of Devillard et al. can be simplified to the plane wave approximation, and both produce close results to the full model with evanescent modes for mild sinusoidal beds. To investigate the validity of the wide-spacing approximation as the number of steps increases, numerical experiments are extended to steeper topographies. Fig. 5 shows a comparison of the computed reflection coefficients for three methods. Here, EFEM is referred to as the full model incorporating evanescent modes, and both wide-spacing approximation and plain wave approximation are considered. In the computation, the evanescent modes are fixed to 50, but the number of steps is variable to observe its effect on the reflection coefficient. Evidently, as the step number increases, the results of both approximations become closer.

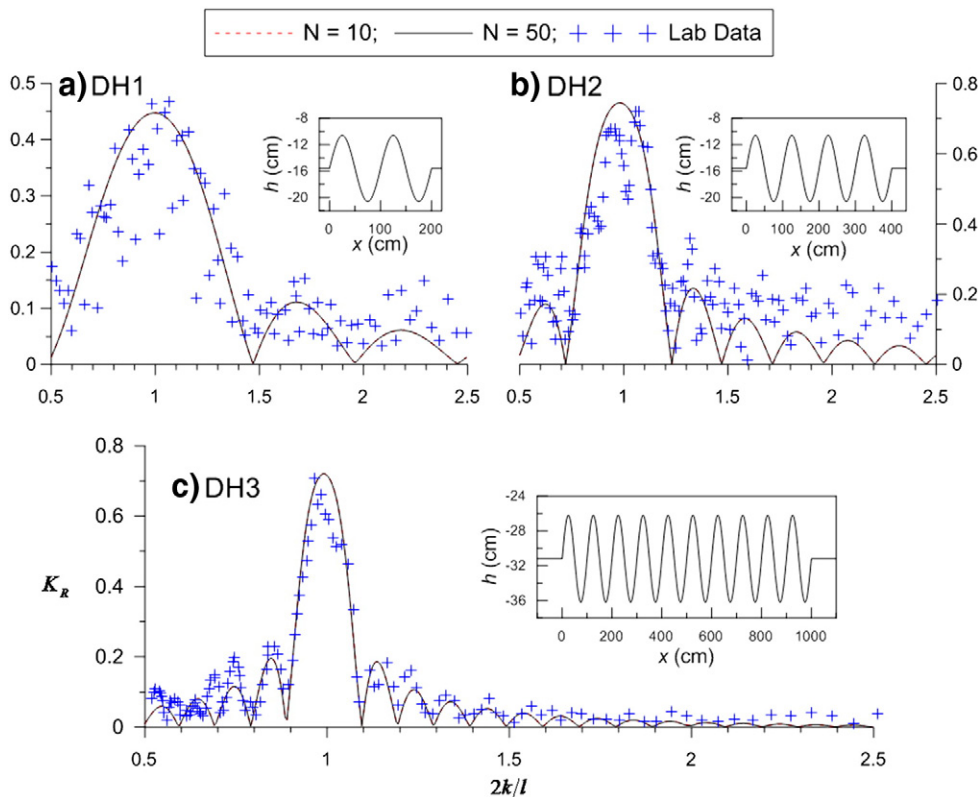


Fig. 3. Comparison of reflection coefficients for sinusoidal topographies listed in Table 2. The red dashed line is the result for 10 evanescent modes with 100 steps per bar wavelength and the solid line for 50 modes with 400 steps per bar wavelength (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article).

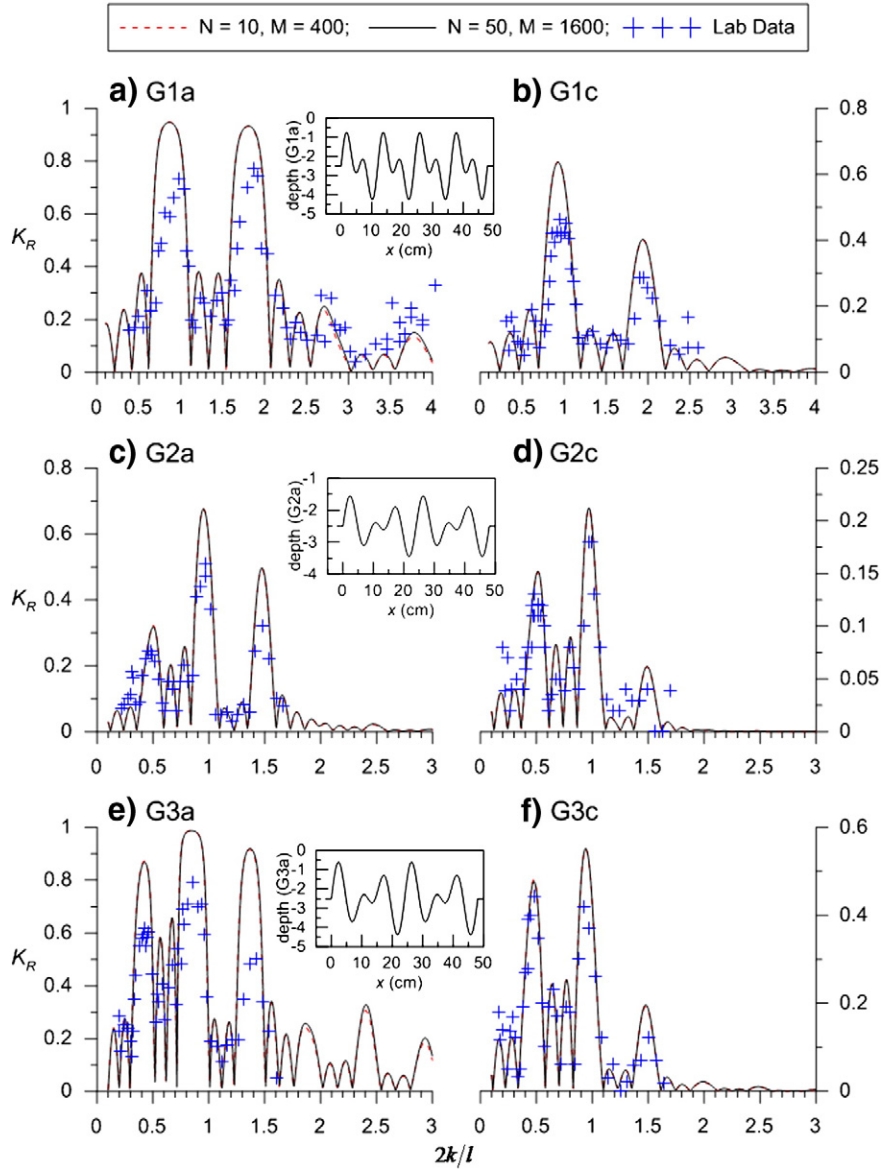


Fig. 4. Comparison of reflection coefficients for doubly sinusoidal topographies listed in Table 2. The red dashed line is the result for 10 evanescent modes with 400 steps and the solid line for 50 modes with 1600 steps (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.).

This implies that the merit of wide-spacing approximation diminishes for a large system with a sufficient number of unknowns. However, it should be noted that a large number of unknowns is a necessary condition to obtain an accurate solution. Once again, Fig. 5 shows that the full EFEM has to be used for the correct prediction of wave scattering over a steep topography.

As described before, the present method can be directly applied to a finite number of subsystems, and scattering matrices of each subsystem are obtained from those of individual steps in the subsystem. These scattering matrices of the subsystem can be used to analyze the interaction between bars of a given topography. To this end, we consider two beds, “DH2” and “G1a”, and the mode number is fixed to $N = 10$. Each bed has 4 bars, each of which is approximated by 100 steps. Fig. 6 shows the reflected wave amplitude, $|p_{\bar{1}}^-|$ in Eq. (2.6), from bars under consideration, and an incident plane wave of unit amplitude comes from $x \rightarrow -\infty$.

Fig. 6a shows reflection coefficients from the first two bars. The extended scattering matrix of each bar, $\tilde{\mathbf{R}}_i^\pm$ and $\tilde{\mathbf{T}}_i^\pm$, can be computed

from Eqs. (3.14) and (3.15) by using those of individual steps in a bar. Then, the scattering equation for bars is given similarly to Eq. (3.7) by

$$\begin{cases} X_1^- = \tilde{\mathbf{R}}_1^+ X_1^+ + \tilde{\mathbf{T}}_1^- X_{101}^- \\ X_{101}^+ = \tilde{\mathbf{T}}_1^+ X_1^+ + \tilde{\mathbf{R}}_1^- X_{101}^- \\ X_{101}^- = \tilde{\mathbf{R}}_2^+ X_{101}^+ + \tilde{\mathbf{T}}_2^- X_{201}^- \\ X_{201}^+ = \tilde{\mathbf{T}}_2^+ X_{101}^+ + \tilde{\mathbf{R}}_2^- X_{201}^- \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1^- \\ X_{101}^+ \\ X_{101}^- \\ X_{201}^+ \end{cases} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_2^+ & \tilde{\mathbf{S}}_2^- \end{bmatrix} \begin{cases} X_1^+ \\ X_{201}^- \end{cases}. \quad (4.4)$$

From Eq. (4.4), the reflected wave amplitude vector X_1^- can be expressed in terms of two incoming waves, X_1^+ and X_{201}^- , towards the bars. Solving the equation, we have

$$X_1^- = \left[\tilde{\mathbf{R}}_1^+ + \tilde{\mathbf{T}}_1^- (\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{R}}_2^+ \tilde{\mathbf{R}}_1^-)^{-1} \tilde{\mathbf{R}}_2^+ \tilde{\mathbf{T}}_1^+ \right] X_1^+ + \tilde{\mathbf{T}}_1^- (\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{R}}_2^+ \tilde{\mathbf{R}}_1^-)^{-1} \tilde{\mathbf{T}}_2^- X_{201}^-. \quad (4.5)$$

The reflected wave from the two bars for the incident wave X_1^+ has two components. The $\tilde{\mathbf{R}}_1^+$ component is a contribution from the first bar, and

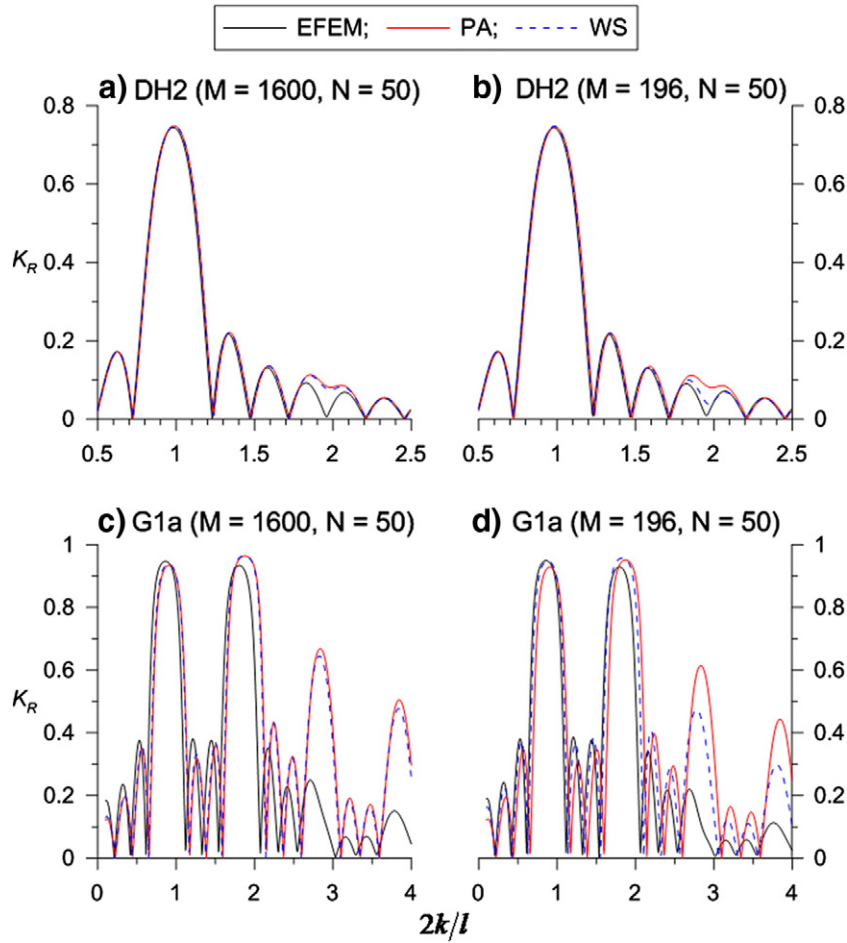


Fig. 5. Validity check for wide-spacing approximation as the number of steps increases. The bed configurations are listed in Table 2.

the other indicates multiple interactions between two bars. In Fig. 6a, the solid black line denotes the reflection coefficients from the two bars, the blue line with symbols is for the contribution of $\tilde{\mathbf{R}}_1^+$, and the red one is for the interaction. The green line is the phase difference of the two components. In the neighborhood of $2k/l = 1$, they are almost in phase, and the reflection coefficient is reinforced. On the other hand, near $2k/l = 1.47$, they are out of phase, which gives rise to very small reflection. Second-order resonance occurs near $2k/l = 2$, but the computed reflection coefficient is close to zero. In Fig. 6a, it can be observed that the two contributions are nearly in phase, but both amplitudes are close to zero, which gives nearly zero reflection.

Similarly, we can compute the extended transfer matrix of the first three bars $\tilde{\mathbf{S}}_3^+$ from Eqs. (3.12)–(3.15). To compute the solution of the four bars given, we finally have to use the above equations once again. Then, the reflected wave amplitude vector X_1^- for the problem is updated to

$$X_1^- = (\tilde{\mathbf{S}}_{3,1}^+ + \tilde{\mathbf{S}}_{3,1}^- \tilde{\mathbf{S}}_{4,7}^+) X_1^+ + \tilde{\mathbf{S}}_{3,1}^- \tilde{\mathbf{S}}_{4,7}^- X_{401}^- \quad (4.6)$$

with

$$\tilde{\mathbf{S}}_{4,7}^+ = (\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{R}}_4^+ \tilde{\mathbf{S}}_{3,6}^-)^{-1} \tilde{\mathbf{R}}_4^+ \tilde{\mathbf{S}}_{3,6}^+, \quad \tilde{\mathbf{S}}_{4,7}^- = (\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{R}}_4^- \tilde{\mathbf{S}}_{3,6}^-)^{-1} \tilde{\mathbf{T}}_4^-. \quad (4.7)$$

From the given conditions of an incident wave, the second term in Eq. (4.6) is now dropped out. Fig. 6b corresponds to the “DH2” bed in Table 2. When an additional bar is added, the magnitude of the resonance peaks is increased and the peak width becomes narrower. The number of side lobes flanked by the main peak is also increasing,

as shown in the figure, which is largely caused by the phase difference between two contributions. The magnitude due to interaction is diminishing with increasing bar number, which in turn makes the main peak magnitude increase slowly. Near $2k/l = 2$, the reflection coefficient and magnitude of both contributions become zero again. Now, it is evident that this originated from a single bar and continuously carried over. Accordingly, in all sinusoidal beds, a very small reflection is detected near $2k/l = 2$.

Fig. 6d corresponds to a doubly sinusoidal bed “G1a”, and reflection coefficients from its first two bars are shown in Fig. 6c. Since the component wavelength ratio of the bed is 2, both first-order and difference resonances occur at a value of $2k/l = 1$. Thus, it is difficult to discriminate the two contributions separately. In comparison with Fig. 6a, Fig. 6c shows a more apparent shift of the first-order resonance peaks. This shift also appears in the result of the single bar, indicated by the blue line with symbols in Fig. 6c.

The model prediction for a doubly sinusoidal bed “G3a” is shown in Fig. 6e and Fig. 6f. The ratio of larger and smaller component wavelengths in this bedform is given by 1.5, so additional higher-order resonances occur at distinct values of 0.5 and 2.5 in contrast to the bed “G1a”. Since bed “G3a” is more complex in shape and steeper, graphs of both the reflection coefficient and phase difference look more complicated, and the shift of the first-order resonance peaks is most significant.

5. Conclusions

A new transfer matrix incorporating evanescent modes is developed to solve the two-dimensional linear wave scattering problem by varying topography. When the matrix acts on the given incident waves, the full

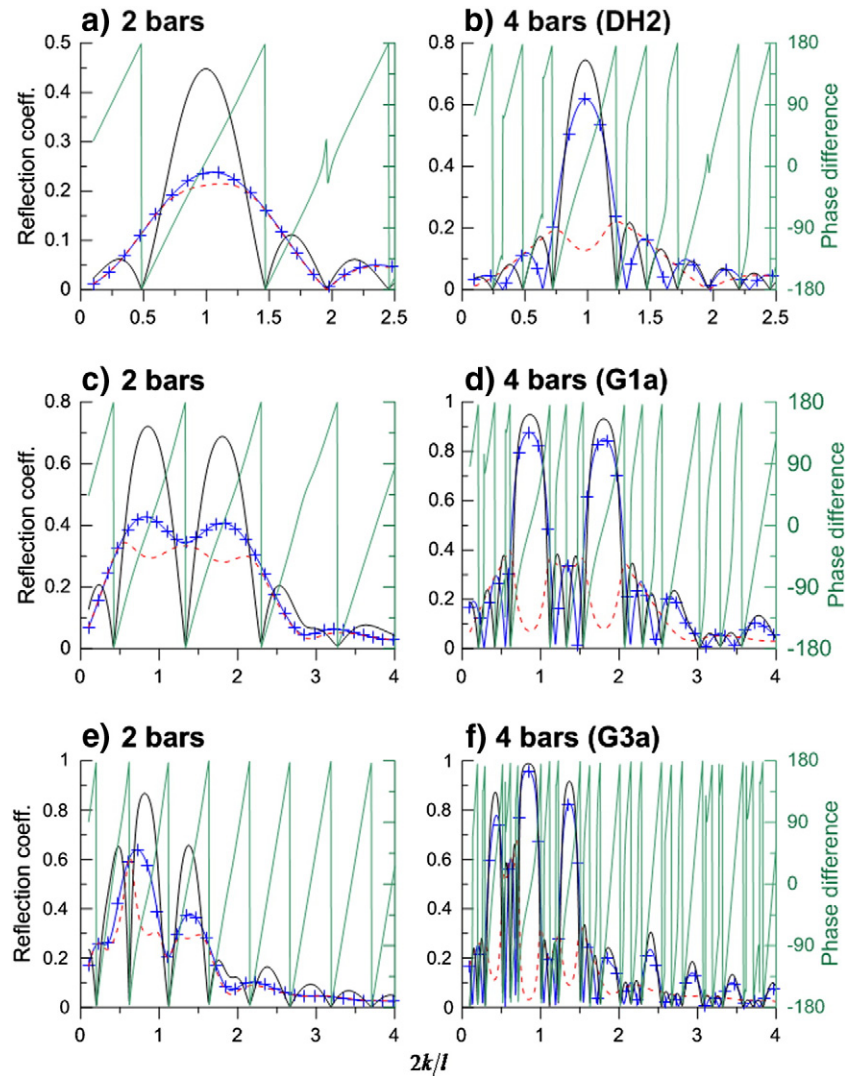


Fig. 6. Changes in reflection coefficient and its contributions with increasing number of bars in periodic beds for incident plane wave of unit amplitude coming from $x \rightarrow -\infty$. The solid black line denotes reflection coefficients from all bars under consideration, the blue line with symbols for contribution for the other bars except the last one and the red dotted line for the interaction between two components in the bed. The green line is the phase difference of the two components (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.).

solution of the scattered wave field over a stepwise topography is obtained. The transfer matrix is represented in terms of the scattering matrices of individual steps, which enable the method to efficiently handle practical problems of complicated bedforms. To obtain accurate solutions, we increased the number of unknowns up to 643,200, in which 1600 steps were used with 200 evanescent modes. Tests of computing time also demonstrated the surprisingly powerful capability of the present method in reducing computing time compared to the conventional method of direct inversion. Highly accurate solutions for periodic beds are presented in comparison to previous studies (Chamberlain and Porter, 1995; Guazzelli et al., 1992; O'Hare and Davies, 1993).

The present method can also be applied without modification to smaller subsystems of steps, and the solution does not depend on the choice of subdivision locations. Thus, it improves upon the method of Guazzelli et al. (1992). Repeating the procedure for obtaining the scattering matrix of a subsystem to the group of subsystems gives the scattering properties of the whole bedform. This feature is used to examine interaction between bars in periodic beds, in which changes of the reflection coefficient and its contributions with increasing number of bars are illustrated. The shift of resonance peaks towards lower wavenumbers is reassessed in terms of parameters such as the bar amplitude ratio to still-water depth, the bed slope, and the complexity of the bed shape. For the

sinusoidal beds studied by Davies and Heathershaw (1984), very small reflection near the location of second-order resonance is clarified, and a nearly zero reflection coefficient of a single bar at the point successively affects a very small reflection of this type of periodic bed with multiple bars. For a large system, numerical results of wide-spacing approximation are very close to those of plane wave approximation, and eventually its merit disappears.

Acknowledgments

This work was supported in part by the Korean Government MOF research grant "Development of Korea Operational Oceanographic System, Phase 2", and by KIOST projects, "Development of Mooring Anchor for Artificial Island at Near Shore" and "Stepwise Approximation for Linear Wave Scattering".

References

- Athanassoulis, G.A., Belibassakis, K.A., 1999. A consistent coupled-mode theory for the propagation of small-amplitude water waves over variable bathymetry regions. *J. Fluid Mech.* 389, 273–301.
- Bender, H.J., Dean, R.G., 2003. Wave transformation by two-dimensional bathymetric anomalies with sloped transition. *Coast. Eng.* 50, 61–84.

- Berkhoff, J.C.W., 1972. Computation of combined refraction–diffraction. Proc. 13th Conf. on Coastal Eng. ASCE, 1, pp. 471–490.
- Chamberlain, P.G., Porter, D., 1995. The modified mild-slope equation. *J. Fluid Mech.* 291, 393–407.
- Chamberlain, P.G., Porter, D., 2006. Multi-mode approximations to wave scattering by an uneven bed. *J. Fluid Mech.* 556, 421–441.
- Davies, A.G., Heathershaw, A.D., 1984. Surface-wave propagation over sinusoidally varying topography. *J. Fluid Mech.* 144, 419–443.
- Devillard, P., Dunlop, F., Souillard, B., 1988. Localization of gravity waves on a channel with a random bottom. *J. Fluid Mech.* 186, 521–538.
- Evans, D.V., Linton, C.M., 1994. On step approximation for water–wave problems. *J. Fluid Mech.* 278, 229–249.
- Greenberg, M.D., 1978. *Foundations of applied mathematics*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Guazzelli, E., Rey, V., Belzons, M., 1992. Higher-order bragg reflection of gravity surface waves by periodic beds. *J. Fluid Mech.* 245, 301–317.
- Kirby, J.T., 1986. A general wave equation for waves over rippled beds. *J. Fluid Mech.* 162, 171–186.
- Kirby, J.T., Dalrymple, R.A., 1983. Propagation of obliquely incident water waves over a trench. *J. Fluid Mech.* 133, 47–63.
- Massel, S.R., 1993. Extended refraction–diffraction equation for surface waves. *Coast. Eng.* 19, 97–126.
- Mattioli, R., 1991. Resonant reflection of surface waves by non-sinusoidal bottom undulations. *Appl. Ocean Res.* 13, 49–53.
- Mei, C.C., Stiassnie, M., Yue, D.K.-P., 2005. *Theory and applications of ocean surface waves*. World Scientific Publishing Co., Singapore.
- Miles, J.W., 1967. Surface-wave scattering matrix for a shelf. *J. Fluid Mech.* 28, 755–767.
- O'Hare, T.J., Davies, A.G., 1992. A new models for surface wave propagation over undulating topography. *Coast. Eng.* 18, 125–266.
- O'Hare, T.J., Davies, A.G., 1993. A comparison of two models for surface-wave propagation over rapidly varying topography. *Appl. Ocean Res.* 15, 1–11.
- Porter, R., Porter, D., 2000. Water wave scattering by a step of arbitrary profile. *J. Fluid Mech.* 411, 131–164.
- Porter, R., Porter, D., 2003. Scattered and free waves over periodic beds. *J. Fluid Mech.* 483, 129–163.
- Porter, D., Staziker, D.J., 1995. Extensions of mild-slope equation. *J. Fluid Mech.* 300, 367–384.
- Rey, V., Belzons, M., Guazzelli, E., 1992. Propagation of surface gravity waves over a rectangular submerged bar. *J. Fluid Mech.* 235, 453–479.
- Srokosz, M.A., Evans, D.V., 1979. A theory for wave-power absorption by two independently oscillating bodies. *J. Fluid Mech.* 90, 337–362.
- Takano, K., 1960. Effets d'un obstacle parallélépipédique sur la propagation de la houle. *La Houille Blanche* 15, 247–267.



Transfer matrix of linear water wave scattering over a stepwise bottom



Seung-Nam Seo

Coastal Development & Ocean Energy Research Division, Korea Institute of Ocean Science and Technology, Ansan 426–744, Republic of Korea
Ocean Science & Technology School, Korea Maritime and Ocean University, Busan 606–791, Republic of Korea

ARTICLE INFO

Article history:

Received 20 September 2013
Received in revised form 23 January 2014
Accepted 27 January 2014
Available online xxxx

Keywords:

Water wave scattering
Stepwise approximation
Transfer matrix
Evanescent modes
Reflection coefficient

ABSTRACT

For a two-dimensional linear wave scattering problem, a new transfer matrix incorporating evanescent modes is developed, from which the solution of a scattered wave field over a stepwise topography is directly obtained. The present method is shown to be capable of solving practical scattering problems with complicated bedforms, for which application of the conventional methods has been fairly limited. Highly accurate numerical solutions for sufficiently large systems are presented, and the computational efficiency of the present method is demonstrated. The interaction of bars in periodic beds is examined, and changes in the reflection coefficient with increasing number of bars are illustrated.

© 2014 The Author. Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

For a varying topography in which the change of depth within a wavelength is appreciable, reflected waves can no longer be neglected, as waves are scattered by the undulating bottom. This interaction between surface water waves and periodic bottom topographies has been studied extensively. The main issue has been focused on the Bragg resonance reflection of incident waves when the surface wavelength is about twice the wavelength of the bed profile (Mei et al., 2005).

When the bottom is rapidly varying with steep slopes, the evanescent modes must be included to predict wave scattering accurately. These modes represent local effects, but through mode coupling, they affect the propagating modes. The inclusion of evanescent modes gives rise to an additional set of coupled equations, from which the accurate higher-order Bragg resonances and the clear shift of Bragg peaks towards lower wavenumbers are obtained (Guazzelli et al., 1992; Mattioli, 1991).

The stepwise approximation, in which a varying bottom is approximated by a series of steps, has proved successful for wave scattering problems. The solution of each region of constant depth in the approximation can be expressed as an eigenfunction expansion. To determine unknown coefficients in the expansion, matching conditions are used at every boundary of the intervening shelves to ensure continuity of the fluid velocity and pressure over the depth. For an accurate solution, the number of both steps and evanescent modes should be increased to a sufficient level. By increasing the number of unknowns, a more accurate solution can be obtained, but large amounts of computational effort are also required. Since the simple direct inversion of a matrix uses a large amount of memory as well, the conventional method is not suitable, especially for a large system of equations. In spite of several efforts

to overcome this difficulty, the limitation on increasing the number of unknowns has still remained. Therefore, a new method is needed to alleviate the limitation appreciably.

Devillard et al. (1988) devised a transition matrix method based on both the scattering matrix by Miles' (1967) variational approximation and the wide-spacing approximation by Srokosz and Evans (1979). The propagating modes on either side of a shelf are related to a 2×2 transition matrix expressed in analytical form. Then, the scattering property is obtained by successive multiplication of the transition matrices corresponding to each shelf. This idea was adopted by Evans and Linton (1994) to find the scattering properties in a transformed domain by a conformal mapping technique. O'Hare and Davies (1993) applied the plane wave approximation, which is a simplified version of the wide-spacing approximation, to predict the scattering of periodic bedforms. Their model provides good predictions for sinusoidal beds, but poor predictions for higher-order resonances of doubly sinusoidal beds. This strongly implies the inclusion of evanescent modes in the scattering of complicated topographies. Guazzelli et al. (1992) developed a hybrid wide-spacing approximation by subdividing a bed into smaller subsystems of steps to enhance the ability of solving fairly large linear systems with a reasonable amount of effort, although it somewhat sacrifices the accuracy of the solution. Coupling between all wave modes is taken into account in each subsystem, but the subsystems are not coupled by the evanescent modes. Since the solution is affected by the choice of subsystems, they indicated that an adequate subdivision into subsystems must be selected. Rey et al. (1992) presented both experimental and numerical results of the propagation of normally incident waves over a rectangular submerged bar using the fully coupled model by Takano (1960) and Kirby and Dalrymple (1983) and the approximate model by Devillard et al. (1988).

Another line of approach to successfully predict linear wave scattering is based on the mild slope approximation. After [Berkhoff \(1972\)](#) introduced the mild slope equation, several extensions have been made aiming at steeper slopes and more complex bed shapes. The extended mild slope equation by [Kirby \(1986\)](#) and the modified mild slope equation by [Chamberlain and Porter \(1995\)](#) produced accurate prediction for sinusoidal beds where the mild slope equation failed. [Massel \(1993\)](#) and [Porter and Staziker \(1995\)](#) presented multi-mode extensions to include additional evanescent modes to cope with steeper slopes. [Athanasoulis and Belibassakis \(1999\)](#) and [Chamberlain and Porter \(2006\)](#) showed that a sloping bed mode added to the multi-mode extension improves the convergence rate of the approximation.

Recently, [Bender and Dean \(2003\)](#) applied the stepwise approximation to study wave scattering by 2-dimensional trenches and sills with sloped transitions. They focused on the effects of sloped transition on the wave scattering and found that the sloped transitions led to a reduction in the reflection coefficients. Their numerical results of the stepwise approximation were compared favorably with those from other shallow water models. In a numerical experiment, [Bender and Dean \(2003\)](#) used at most 40 steps and 16 evanescent modes, while [Guazzelli et al. \(1992\)](#) used 60 steps and at most 4 evanescent modes. Consequently, a limited number of unknowns have been used in the approximation, and solutions have been compared mainly to available laboratory data. For better understanding of the stepwise approximation, the accuracy of the solution has to be tested with increasing unknowns to a sufficient level.

Since most of the computing time in the conventional method is spent in inverting the matrix of linear equations, it is crucial to find an effective way to use a number of smaller matrices to replace the one corresponding large matrix. To use the smallest matrix for the inversion, our aim is to construct the solution by summing all scattering matrices of individual steps. To this end, a transfer matrix is developed not only to significantly relieve the limitation of the previous models, but also to obtain the full solution of the two-dimensional linear wave scattering problem without any restriction except for the stepwise approximation. We present highly accurate numerical solutions for wave scattering by variable topography and reassess the results. Extensive accuracy tests of the solution are performed, and for multiple scattering between bars, we examine changes in the reflection coefficient and its contributions with increasing number of bars in periodic beds.

2. Eigenfunction expansion method

For linear water waves with angular frequency ω , we seek a complex velocity potential $\phi(x, z) \exp(-i\omega t)$. A smooth bottom connecting two regions of constant depth is approximated by M consecutive steps with $(M + 1)$ horizontal shelves. Although the length of the first and last shelves may not be finite, the intervening shelves are of finite length. For a better approximation to a given bed profile, the number of steps should be increased.

Because the depth h_i over the i th shelf ($x_{i-1} < x < x_i$) is constant, the solution can be expressed by an eigenfunction expansion in the following form:

$$\phi_i = \left(p_i^+ e^{ik_{i,0}x} + p_i^- e^{-ik_{i,0}x} \right) \cosh k_{i,0}(z + h_i) + \sum_{j=1}^{\infty} \left[s_{i,j}^+ e^{-k_{i,j}(x-x_{i-1})} + s_{i,j}^- e^{k_{i,j}(x_i-x)} \right] \cos k_{i,j}(z + h_i), \quad (2.1)$$

where the propagating mode amplitude p_i^\pm and evanescent mode amplitudes $s_{i,j}^\pm$ are to be determined, and the superscript \pm denotes the wave propagation direction. $k_{i,j}$ are the solutions of the dispersion relationship.

$$\omega^2 = gk_{i,0} \tanh k_{i,0}h_i = -gk_{i,j} \tan k_{i,j}h_i. \quad (2.2)$$

The eigenfunctions are given by

$$f_{i,0} = \cosh k_{i,0}(z + h_i), \quad f_{i,n} = \cos k_{i,j}(z + h_i), \quad (2.3)$$

which form a complete and orthogonal set for the interval $(-h_i, 0)$.

To determine the unknown amplitudes in Eq. (2.1), the matching conditions are imposed at each boundary separating adjacent regions.

$$\begin{cases} \phi_i = \phi_{i+1} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial x} = \frac{\partial \phi_{i+1}}{\partial x}; x = x_i, -\min(h_i, h_{i+1}) \leq z \leq 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

For computational purposes, the infinite series in Eq. (2.1) is truncated into a finite series of N terms. Substituting Eq. (2.1) into Eq. (2.4) produces a residual due to the truncation. Following the method of weighted residuals by [Kirby and Dalrymple \(1983\)](#), we have $2(N + 1)$ linear algebraic equations from the matching conditions at $x = x_i$,

$$\begin{cases} \int_{-h_s}^0 \phi_i f_{i,j}^s dz = \int_{-h_s}^0 \phi_{i+1} f_{i,j}^s dz & ; x = x_i, h_s \equiv \min(h_i, h_{i+1}), \\ \int_{-h_i}^0 \frac{\partial \phi_i}{\partial x} f_{i,j}^d dz = \int_{-h_{i+1}}^0 \frac{\partial \phi_{i+1}}{\partial x} f_{i,j}^d dz \end{cases} \quad (2.5)$$

where $f_{i,j}^s$ denotes an eigenfunction in the shallower shelf, and $f_{i,j}^d$ is that in the deeper shelf. We make use of the shift of the integration limit in the velocity condition using no contributions from the vertical wall of the step.

Evaluation of the integrals in Eq. (2.5) gives a linear equation system. In this study, the unknown vector \mathbf{X}_i is regrouped into two sub-vectors of $(N + 1)$ elements.

$$\mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} X_i^- \\ X_i^+ \end{bmatrix}, \quad X_i^\pm = \{p_i^\pm, s_{i,1}^\pm, \dots, s_{i,N}^\pm\}^T. \quad (2.6)$$

Then, the linear system can be written in matrix form as

$$\mathbf{A}_i \mathbf{X}_{i-1} + \mathbf{B}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{C}_i \mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{0}, \quad (2.7)$$

where matrices \mathbf{A}_i , \mathbf{B}_i , and \mathbf{C}_i have four sub-matrices of order $(N + 1)$ elements.

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_{i,12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{i,22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{i,11} & \mathbf{B}_{i,12} \\ \mathbf{B}_{i,21} & \mathbf{B}_{i,22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{i,11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{i,21} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

For M steps and N evanescent modes, $2M(N + 1)$ linear equations are formed. When the number of both steps and evanescent modes is increased for an accurate solution, the number of equations to be solved increases much more rapidly. To circumvent the difficulties in solving a large system of equations, we present a new method in which the solution is built using the individual scattering matrices of each step. More importantly, we demonstrate that the present method is another way of exactly solving the scattering problem of a very large system of equations. [Table 1](#) shows the computed CPU times of both the conventional direct inversion and the present method for two wave inputs. It is evident that the present method drastically reduces the computing time, especially for the case of a large number of unknowns, in which the direct inversion method is impractical as shown.

After obtaining all velocity potential amplitudes, surface elevation can be computed from the dynamic free surface condition. From the velocity potential representation in Eq. (2.1), the reflection coefficient K_R and transmission coefficient K_T are given by

$$K_R = \frac{|p_1^-|}{|p_1^+|}, \quad K_T = \frac{|p_{M+1}^+| \cosh k_{M+1} h_{M+1}}{|p_1^+| \cosh k_1 h_1}. \quad (2.9)$$

Table 1
Computed CPU times of conventional direct inversion and present method for two wave inputs.

M steps	N modes	No. of unknowns	CPU time (sec)	
			Direct inversion	Present method
100	0	200	0.10	0.00
	1	400	0.76	0.02
	5	1200	32.57	0.03
	10	2200	243.38	0.16
	20	4200	1701.60	0.76
	200	40,200	–	626.61

‘–’denotes no result.

3. Transfer and scattering matrices

In this section, we begin by finding the simplest solution for the scattering problem of a single step and build up towards a more complicated one for a multi-step. As mentioned, we shall show how to construct the transfer matrix of a multi-step using the pre-calculated scattering matrices successively.

3.1. A single step

In previous studies, shelf lengths of a single step were assumed to be infinite so that only the propagating modes of incident waves coming from $x \rightarrow \pm \infty$ can be encountered around its depth discontinuity. However, we consider a more general case in which the shelf length can be finite and incident waves including evanescent modes are given at the both ends.

Combining the incident waves in Eq. (2.7) and transposing them, the equation can be rewritten in the following form

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{X}_1 = \mathbf{D}_1 \tilde{\mathbf{X}}_1 \equiv \mathbf{X}_1^{\text{in}}, \quad (3.1)$$

with

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1,11} & \mathbf{B}_{1,12} \\ \mathbf{B}_{1,21} & \mathbf{B}_{1,22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_1 = - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,12} & \mathbf{C}_{1,11} \\ \mathbf{A}_{1,22} & \mathbf{C}_{1,21} \end{bmatrix}; \quad (3.2)$$

$$\mathbf{X}_1 = \begin{Bmatrix} X_1^- \\ X_2^+ \end{Bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{X}}_1 = \begin{Bmatrix} X_1^+ \\ X_2^- \end{Bmatrix}.$$

The elements in both \mathbf{B}_1 and \mathbf{D}_1 are computable from inner products of the eigenfunction and weight function. As an example for $h_1 < h_2$, from the velocity matching condition ($m = 1, \dots, N + 1$), we have the elements of the matrices \mathbf{B}_1 and \mathbf{D}_1 .

$$b_{m,n} = \begin{cases} -ik_{1,0} e^{-ik_{1,0}x_1} \int_{-h_1}^0 f_{1,0} f_{2,\bar{m}} dz & (n = 1), \\ k_{1,j} \int_{-h_1}^0 f_{1,j} f_{2,\bar{m}} dz & (n = j + 1), \\ -ik_{2,0} e^{ik_{2,0}x_1} \int_{-h_2}^0 f_{2,0} f_{2,\bar{m}} dz & (n = N + 2), \\ k_{2,j} \int_{-h_2}^0 f_{2,j} f_{2,\bar{m}} dz & (n = j + N + 2). \end{cases} \quad (3.3)$$

$$d_{m,n} = \begin{cases} -ik_{1,0} e^{ik_{1,0}x_1} \int_{-h_1}^0 f_{1,0} f_{2,\bar{m}} dz & (n = 1), \\ k_{1,j} e^{-k_{1,j}\Delta x_1} \int_{-h_1}^0 f_{1,j} f_{2,\bar{m}} dz & (n = j + 1), \\ -ik_{2,0} e^{-ik_{2,0}x_1} \int_{-h_2}^0 f_{2,0} f_{2,\bar{m}} dz & (n = N + 2), \\ k_{2,j} e^{-k_{2,j}\Delta x_2} \int_{-h_2}^0 f_{2,j} f_{2,\bar{m}} dz & (n = j + N + 2). \end{cases}$$

The pressure matching condition ($m = N + 2, \dots, 2N + 2$) produces

$$b_{m,n} = \begin{cases} e^{-ik_{1,0}x_1} \int_{-h_1}^0 f_{1,0} f_{1,\bar{m}} dz & (n = 1), \\ \int_{-h_1}^0 f_{1,j} f_{1,\bar{m}} dz & (n = j + 1), \\ -e^{ik_{2,0}x_1} \int_{-h_1}^0 f_{2,0} f_{1,\bar{m}} dz & (n = N + 2), \\ -\int_{-h_1}^0 f_{2,j} f_{1,\bar{m}} dz, & (n = j + N + 2), \end{cases} \quad (3.4)$$

$$d_{m,n} = \begin{cases} -e^{ik_{1,0}x_1} \int_{-h_1}^0 f_{1,0} f_{1,\bar{m}} dz & (n = 1), \\ -e^{-k_{1,j}\Delta x_1} \int_{-h_1}^0 f_{1,j} f_{1,\bar{m}} dz & (n = j + 1), \\ e^{-ik_{2,0}x_1} \int_{-h_1}^0 f_{2,0} f_{1,\bar{m}} dz & (n = N + 2), \\ e^{-k_{2,j}\Delta x_2} \int_{-h_1}^0 f_{2,j} f_{1,\bar{m}} dz & (n = j + N + 2), \end{cases}$$

where $j = 1, \dots, N$. The shelf length is given by $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, ($i = 1, 2$) and

$$\bar{m} = \begin{cases} m-1, & m \leq N+1 \\ m-N-2, & m > N+1 \end{cases}. \quad (3.5)$$

It is evident from Eqs. (3.3) and (3.4) that the evanescent modes are coupled with the propagating modes. Particularly, the shelf length affects the evanescent modes of the incident waves by $\exp(-k_{1,j}\Delta x_i)$, which eventually has an effect on the scattered waves. When the length is large enough, all contributions of evanescent modes virtually vanish in \mathbf{X}_1^{in} . On the other hand, when the incident waves are exclusively given by propagating modes as in the plane wave, the same result happens to \mathbf{X}_1^{in} , even though the shelf length is not long enough. Thus, for a step of infinite shelf length, incident waves are equivalent to plane waves.

By solving Eq. (3.1), the scattering matrix of a single step $\mathbf{S}_1 = [\mathbf{S}_1^+ \mathbf{S}_1^-]$ is obtained.

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{D}_1 \tilde{\mathbf{X}}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^+ & \mathbf{T}_1^- \\ \mathbf{T}_1^+ & \mathbf{R}_1^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^+ \\ X_2^- \end{Bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{1,1}^+ & \mathbf{S}_{1,1}^- \\ \mathbf{S}_{1,2}^+ & \mathbf{S}_{1,2}^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^+ \\ X_2^- \end{Bmatrix}. \quad (3.6)$$

The matrices \mathbf{R}_1^\pm and \mathbf{T}_1^\pm denote coefficients of the reflected and transmitted waves, respectively. For a single step, the transfer matrix is interchangeable with the scattering matrix. We can see from Eq. (3.6) that multiplying the transfer matrix by incident waves yields the solution of scattered waves. Furthermore, the transfer matrix reflects the nature of the system regarding topographic features and wave properties. Since the scattering matrix exists even for a special step of equal depth, where only the transmitted wave is formed, \mathbf{B}_1^{-1} always exists. When 1 and 2 are replaced by i and $i + 1$, Eq. (3.6) gives the scattered wave equations of the i th step.

When the solution \mathbf{X}_1 of Eq. (3.6) is substituted into Eq. (2.1), it can be observed that the produced evanescent modes decay exponentially away from depth discontinuities. If a shelf length is so large that all evanescent modes are negligibly attenuated inside the shelf, only the propagating modes arrive at the neighboring step. Devillard et al. (1988) adopted this wide-spacing approximation and applied it to every step in a stepped bed to study Anderson localization to water waves over a random bottom.

3.2. Two steps

In a bed with two steps, a multiple scattering between the steps is formed, which is absent in the case of a single step. Linear equations

for two steps are directly obtained from Eq. (2.7), and they can be given by the scattering matrix form of each step.

$$\begin{cases} X_1^- = \mathbf{R}_1^+ X_1^+ + \mathbf{T}_1^- X_2^- \\ X_2^- = \mathbf{T}_1^+ X_1^+ + \mathbf{R}_1^- X_2^- \\ X_2^+ = \mathbf{R}_2^+ X_2^- + \mathbf{T}_2^- X_3^- \\ X_3^- = \mathbf{T}_2^+ X_2^- + \mathbf{R}_2^+ X_3^- \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1^- \\ X_2^- \\ X_2^+ \\ X_3^- \end{cases} = [\mathbf{S}_2^+ \quad \mathbf{S}_2^-] \begin{cases} X_1^+ \\ X_3^- \end{cases}. \quad (3.7)$$

Here, the incident waves with amplitudes X_1^+ and X_3^- are given, and the other amplitudes are to be determined. Similarly to a single step, the unknowns can be expressed by the transfer matrix, $\mathbf{S}_2 = [\mathbf{S}_2^+ \quad \mathbf{S}_2^-]$, acting on the incident waves. It is evident from Eq. (3.7) that each of them has four sub-matrices of order $(N + 1)$.

$$\mathbf{S}_2^+ = [\mathbf{S}_{2,1}^+ \quad \mathbf{S}_{2,2}^+ \quad \mathbf{S}_{2,3}^+ \quad \mathbf{S}_{2,4}^+]^T; \quad \mathbf{S}_2^- = [\mathbf{S}_{2,1}^- \quad \mathbf{S}_{2,2}^- \quad \mathbf{S}_{2,3}^- \quad \mathbf{S}_{2,4}^-]^T. \quad (3.8)$$

By solving Eq. (3.7) straightforwardly, we find

$$\begin{aligned} X_2^- &= (\mathbf{I} - \mathbf{R}_2^+ \mathbf{R}_1^-)^{-1} (\mathbf{R}_2^+ \mathbf{T}_1^+ X_1^+ + \mathbf{T}_2^- X_3^-) = \mathbf{S}_{2,3}^+ X_1^+ + \mathbf{S}_{2,4}^- X_3^-, \\ X_2^+ &= (\mathbf{T}_1^+ + \mathbf{R}_1^- \mathbf{S}_{2,3}^+) X_1^+ + \mathbf{R}_1^- \mathbf{S}_{2,3}^- X_3^- = \mathbf{S}_{2,2}^+ X_1^+ + \mathbf{S}_{2,2}^- X_3^-, \\ X_3^- &= \mathbf{T}_2^+ \mathbf{S}_{2,2}^+ X_1^+ + (\mathbf{T}_2^+ \mathbf{S}_{2,2}^- + \mathbf{R}_2^+) X_3^- = \mathbf{S}_{2,4}^+ X_1^+ + \mathbf{S}_{2,4}^- X_3^-, \\ X_1^- &= (\mathbf{R}_1^+ + \mathbf{T}_1^- \mathbf{S}_{2,3}^+) X_1^+ + \mathbf{T}_1^- \mathbf{S}_{2,3}^- X_3^- = \mathbf{S}_{2,1}^+ X_1^+ + \mathbf{S}_{2,1}^- X_3^-, \end{aligned} \quad (3.9)$$

where \mathbf{I} is the identity matrix of order $(N + 1)$. The scattered waves propagating away from a variable bottom profile are X_1^- and X_3^+ .

By extending the argument of a long wave by Mei et al. (2005), the physical features imbedded in Eq. (3.9) can be explained. For simplicity, we examine a scattering process due to a right-going incident wave only. When the incident wave of X_1^+ arrives at the first step $x = x_1$, some of the wave energy with a wave $\mathbf{T}_1^+ X_1^+$ is transmitted into the second shelf, and the rest, $\mathbf{R}_1^+ X_1^+$, is reflected. As soon as this transmitted wave reaches the second step, it undergoes the same scattering process: some energy $\mathbf{T}_2^+ \mathbf{T}_1^+ X_1^+$ is transmitted to the third shelf and the rest, $\mathbf{R}_2^+ \mathbf{T}_1^+ X_1^+$, is reflected back toward the first step. Upon reaching the first step, the back-reflected wave is again split into reflected and transmitted waves to produce $\mathbf{R}_1^- \mathbf{R}_2^+ \mathbf{T}_1^+ X_1^+$ and $\mathbf{T}_1^- \mathbf{R}_2^+ \mathbf{T}_1^+ X_1^+$, respectively. This back-and-forth scattering process is repeated infinitely in the second shelf, as shown in Fig. 1.

Summing up all of the left-going waves in the first shelf, we have

$$\begin{aligned} X_1^- &= \mathbf{R}_1^+ X_1^+ + \mathbf{T}_1^- \mathbf{R}_2^+ \mathbf{T}_1^+ X_1^+ + \mathbf{T}_1^- \mathbf{R}_2^+ \mathbf{R}_1^- \mathbf{R}_2^+ \mathbf{T}_1^+ X_1^+ + \dots \\ &= [\mathbf{R}_1^+ + \mathbf{T}_1^- (\mathbf{I} - \mathbf{R}_2^+ \mathbf{R}_1^-)^{-1} \mathbf{R}_2^+ \mathbf{T}_1^+] X_1^+, \end{aligned} \quad (3.10)$$

where the Neumann series identity is used in the case of a linear matrix $\mathbf{R}_2^+ \mathbf{R}_1^-$ with norm less than unity (Greenberg, 1978). Similarly, the other scattered wave amplitudes can be obtained. When the response of the left-going incident wave is included, it results in Eq. (3.9). It is now

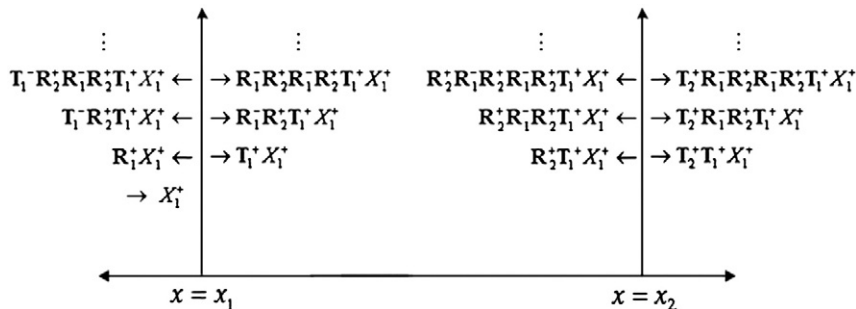


Fig. 1. Multiple scattering with evanescent modes in a bed of two steps for a right-going incident wave X_1^+ .

evident that the mathematical solution in Eq. (3.9) is the sum of the infinite series produced by multiple scattering.

3.3. Multiple steps

Following the procedure in the previous subsection successively, the scattered waves for a bedform of m steps can be easily obtained. The transfer matrix of the first $(m - 1)$ steps is known in the previous computation, as is the scattering matrix of the m th step. Hence, this can be essentially treated as a multiple scattering between two scatterers, with one being composed of the first $(m - 1)$ steps and the last one. Then, for a given m steps, linear algebraic equations can be written as

$$\begin{cases} X_1^- = \mathbf{S}_{m-1,1}^+ X_1^+ + \mathbf{S}_{m-1,1}^- X_m^-, \\ X_2^- = \mathbf{S}_{m-1,2}^+ X_1^+ + \mathbf{S}_{m-1,2}^- X_m^-, \\ \vdots \\ X_{m-1}^- = \mathbf{S}_{m-1,2m-3}^+ X_1^+ + \mathbf{S}_{m-1,2m-3}^- X_m^-, \\ X_m^- = \mathbf{S}_{m-1,2m-2}^+ X_1^+ + \mathbf{S}_{m-1,2m-2}^- X_m^-, \\ X_m^+ = \mathbf{R}_m^+ X_m^- + \mathbf{T}_m^- X_{m+1}^-, \\ X_{m+1}^+ = \mathbf{T}_m^+ X_m^- + \mathbf{R}_m^- X_{m+1}^-. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1^- \\ X_2^- \\ \vdots \\ X_m^- \\ X_{m+1}^+ \end{cases} = [\mathbf{S}_m^+ \quad \mathbf{S}_m^-] \begin{cases} X_1^+ \\ X_{m+1}^+ \end{cases}. \quad (3.11)$$

As shown in Eq. (3.11), the unknown wave amplitudes are weakly coupled because of the first $(m - 1)$ steps, where waves in each shelf are expressed in terms of X_1^+ and X_m^- . As soon as X_m^- is expressed by the incident waves X_1^+ and X_{m+1}^+ , all elements of the first $m - 1$ steps in the transfer matrix are readily obtained. Solving the third and second from the last in the simultaneous equations gives

$$\begin{aligned} X_m^- &= (\mathbf{I} - \mathbf{R}_m^+ \mathbf{S}_{m-1,2m-2}^-)^{-1} \mathbf{R}_m^+ \mathbf{S}_{m-1,2m-2}^+ X_1^+ + (\mathbf{I} - \mathbf{R}_m^+ \mathbf{S}_{m-1,2m-2}^-)^{-1} \mathbf{T}_m^- X_{m+1}^+ \\ &\equiv \mathbf{S}_{m,2m-1}^+ X_1^+ + \mathbf{S}_{m,2m-1}^- X_{m+1}^+. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Substituting X_m^- into the equations, the first $2(m - 1)$ elements of the transfer matrix are obtained.

$$\mathbf{S}_{m,i}^+ = \mathbf{S}_{m-1,i}^+ + \mathbf{S}_{m-1,i}^- \mathbf{S}_{m,2m-1}^+; \quad \mathbf{S}_{m,i}^- = \mathbf{S}_{m-1,i}^- \mathbf{S}_{m,2m-1}^- \quad (i = 1, \dots, 2m-2). \quad (3.13)$$

The left-going scattered wave amplitude is given from Eq. (3.13) by

$$X_1^- = (\mathbf{S}_{m-1,1}^+ + \mathbf{S}_{m-1,1}^- \mathbf{S}_{m,2m-1}^+) X_1^+ + \mathbf{S}_{m-1,1}^- \mathbf{S}_{m,2m-1}^- X_{m+1}^+. \quad (3.14)$$

Using X_m^+ computed from Eq. (3.13), the right-going scattered wave amplitude becomes

$$X_{m+1}^+ = \mathbf{T}_m^+ \mathbf{S}_{m,2m-2}^+ X_1^+ + (\mathbf{T}_m^+ \mathbf{S}_{m,2m-2}^- + \mathbf{R}_m^-) X_{m+1}^- \equiv \mathbf{S}_{m,2m}^+ X_1^+ + \mathbf{S}_{m,2m}^- X_{m+1}^-. \quad (3.15)$$

In most of cases, we are interested in the whole scattering matrix consisting of both Eqs. (3.14) and (3.15). In this case, only the scattered wave amplitudes, X_m^+ and X_{m+1}^+ , need to be computed and saved in memory for the next computation, which reduces the computation significantly. Furthermore, it enables the present method to efficiently obtain solutions of practical scattering problems where a bottom is composed of a large number of steps, and sufficient evanescent modes are incorporated.

For $m = 1$, it can be readily shown that Eqs. (3.12)–(3.15) reduce to Eq. (3.9). It should be noted that the matrix size to be inverted in Eq. (3.12) is $N + 1$, which is half the size of the matrix of the single step. This makes the present method very effective in computation. Besides the computational advantages, however, the present method has additional flexibility compared to the method of subsystems used by Guazzelli et al. (1992). In contrast to the previous method, it is not necessarily limited to use the wide-spacing approximation between the subsystems, nor is it affected by the choice of subdivision locations. For each subsystem, the scattering matrix can be efficiently computed as described above, which now plays a role of that from a single step. Each subsystem is treated as a scatterer like with a single step. Repeating the same solution procedure in Eqs. (3.12)–(3.15) gives the scattered waves by a given topography, and they are expressed by Eqs. (3.14) and (3.15).

Neglecting the effect of evanescent modes, the solution of the plane wave approximation is obtained from Eqs. (3.12)–(3.15) with $N = 0$. For a given $N \geq 1$, however, we can have wide-spacing approximation, hybrid wide-spacing approximation, or the full method. Scattered waves for the wide-spacing approximation can be obtained by simply taking elements for the propagation mode from all scattering matrices of each step and using the same procedure above. Similarly, in the hybrid wide-spacing approximation, elements of the propagation mode from all scattering matrices of every subsystem are used to obtain the scattered waves. Therefore these solutions are approximations to the full method.

4. Numerical results

To verify the present model, numerical results are compared to existing laboratory data and previous results for a symmetric hump and periodic bed profiles. For this purpose, we consider two-dimensional scattering problems by plane wave incident on a given bedform $h(x)$. The varying profile is confined to a finite interval and connected to two regions of constant depth.

A symmetric hump with width λ on an otherwise flat bed was considered by Porter and Staziker (1995), which is given by:

$$h(x) = h_0 \left[2 \left(\frac{x}{\lambda} \right)^2 - 2 \frac{x}{\lambda} + 1 \right], \quad 0 \leq x \leq \lambda. \quad (4.1)$$

As $\omega^2 \lambda / g \rightarrow 0$, the topography becomes a thin barrier with height that is half of the still water depth, h_0 . Chamberlain and Porter (2006) also presented numerical results for this problem using a multi-mode mild slope approximation. Fig. 2 shows a comparison of the reflection coefficients for the problem plotted against the dimensionless width $\omega^2 \lambda / g$. The symbols are results from the method of Porter and Porter (2000), which solves the full linear problem to any accuracy. This figure clearly shows the accuracy of the present method, and it is evident that for small values of $\omega^2 \lambda / g$ corresponding to steep slopes, a larger number of evanescent modes are needed to obtain an accurate result. The hump profile is approximated by 100 equally spaced steps. Both 10 and 50 evanescent modes are used for the computation. To reduce round-off error, the double precision is used in all computations.

The sinusoidal bed considered by Davies and Heathershaw (1984) is given by

$$h(x) = h_0 - b \sin(lx), \quad 0 \leq x \leq 2\pi m / l, \quad (4.2)$$

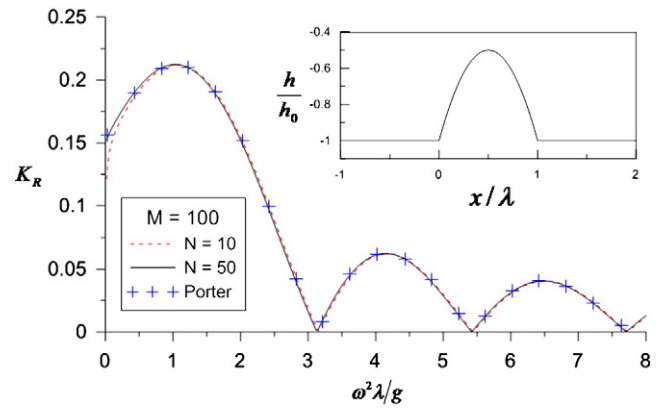


Fig. 2. Comparison of reflection coefficients for the hump topography.

where h_0 is the mean depth, n the number of sinusoidal bars, b the bar amplitude, and l the bar wavenumber. The doubly sinusoidal bed used by Guazzelli et al. (1992) is defined by

$$h(x) = h_0 - b [\sin(lx) + \sin(mx)], \quad 0 \leq x \leq 2\pi m / l, \quad (4.3)$$

where m is the ratio of the larger and smaller bar wavelengths. Here, each bar is taken as a subsystem, and the intervening adjacent bars share a common shelf. The parameters of the sinusoidal beds in Eqs. (4.2) and (4.3) are listed in Table 2. An incident plane wave of unit amplitude coming from $x \rightarrow -\infty$ is considered.

In order to check the accuracy of the results, convergence tests are performed with increasing evanescent modes. Table 3 shows the results for the “DH2” bed at resonance peaks corresponding to $2k/l = 1$ and 2. To demonstrate the capability of the present method in handling a very large system, we increase the numbers of steps and modes to 1600 and 200, respectively. For the case of a fixed number of steps, the sequence of solutions converges to a value depending on the step number as the mode number increases. When both the numbers of steps and modes are increased, a convergent solution can eventually be obtained.

For the sinusoidal beds considered by Davies and Heathershaw (1984), previous studies reported that second-order resonance occurs near $2k/l = 2$ with a sizable magnitude (Chamberlain and Porter, 1995; O’Hare and Davies, 1993). However, the more accurate model by Porter and Porter (2003) revealed very small reflection at the resonance point. We will analyze it in detail at the end of this section.

Fig. 3 shows the computed reflection coefficients for the sinusoidal beds in Table 2 with laboratory experiment data by Davies and Heathershaw (1984). In order to examine the effect of both mode and step numbers on the results, two settings are used in the computation. The red dashed line indicates the result of 10 modes with 100 steps per bar wavelength, and the solid line is for 50 modes with 400 steps. The two lines are identical at this graph resolution, and it is clearly

Table 2
Parameters of bed configuration for periodic bars.

Bed type	Case	h_0 (cm)	b	$2\pi/l$	n	m
Sinusoidal	DH1	15.6	5	100	2	–
	DH2	15.6	5	100	4	–
	DH3	31.2	5	100	10	–
Doubly sinusoidal	G1a	2.5	1	12	4	2
	G1c	4	1	12	4	2
	G2a	2.5	0.5	6	4	1.5
	G2c	4	0.5	6	4	1.5
	G3a	2.5	1	6	4	1.5
	G3c	4	1	6	4	1.5

Table 3
Convergence tests with increasing evanescent modes for the DH2 bed form listed in Table 2.

M steps	N modes	K_R		M steps	N modes	K_R		
		$2k/l = 1$	$2k/l = 2$			$2k/l = 1$	$2k/l = 2$	
100	0	0.74161	0.07987	400	0	0.74606	0.08167	
	1	0.74113	0.03805		1	0.74367	0.04132	
	10	0.73797	0.05420		10	0.74127	0.03760	
	30	0.73751	0.05391		30	0.74072	0.03967	
	50	0.73746	0.05410		50	0.74056	0.04008	
	100	0.73744	0.05415		100	0.74052	0.04005	
800	0	0.73743	0.05417	200	0	0.74050	0.04005	
	1	0.74669	0.08180		1600	0	0.74700	0.08184
	1	0.74399	0.04172		1	0.74413	0.04190	
	10	0.74151	0.03718		10	0.74159	0.03708	
	30	0.74113	0.03789		30	0.74125	0.03752	
	50	0.74100	0.03833		50	0.74117	0.03769	
100	0.74088	0.03866	100	0.74108	0.03795			
200	0.74086	0.03865	200	0.74102	0.03809			

shown that the reflection coefficient is close to zero at a point near $2k/l = 2$. The bed slope of sinusoidal beds is small, so that even plane wave approximation can give good results except near $2k/l = 2$ (O'Hare and Davies, 1993). As the number of bars increases, a slight shift of the first-order resonance peak towards low frequency becomes apparent.

Fig. 4 shows a comparison of the reflection coefficients for the doubly sinusoidal beds considered by Guazzelli et al. (1992). All beds are composed of four bars. In these beds, the ratio of sinusoidal bed components m creates additional higher-order resonances referred to as "difference resonance" near $2k/l = (m - 1)$ and "sum resonance" near $2k/l = (m + 1)$, as described by previous studies (Guazzelli et al.,

1992; O'Hare and Davies, 1993). For the beds of $m = 1.5$, a significant amount of the difference resonance is detected, as shown in Fig. 4c–f. In the computation, the same arrangements as before are used. When the relative bar amplitude ratio defined by b/h_0 is large, the shift of resonance peaks is more apparent, as shown in Fig. 4a in comparison with Fig. 4b. Another factor to affect the shift is the bed slope, which can be seen in Fig. 4e against Fig. 4c.

The combined effect of more complicated bed shape and the steeper slope reduces the accuracy of results in simple models, as shown in Fig. 5. O'Hare and Davies (1993) analyzed the shortcoming due to the exclusion of evanescent modes. In Fig. 4, both results show good agreement with the experiment data, and the two lines are nearly identical except for a few intervals showing slight discrepancy, which indicates the combined effect of complicated bed shape and steep slope. Fig. 4a is very close to Porter and Porter's (2003) figure 6 rather than Athanassoulis and Belibassakis' (1999) figure 8.

Devillard et al. (1988) applied wide-spacing approximation under a special condition where every horizontal shelf length is large compared to the local wavelength above it. Later O'Hare and Davies (1992) showed that when the ratio of each step height to the local water depth is less than 0.02, the wide-spacing approximation of Devillard et al. can be simplified to the plane wave approximation, and both produce close results to the full model with evanescent modes for mild sinusoidal beds. To investigate the validity of the wide-spacing approximation as the number of steps increases, numerical experiments are extended to steeper topographies. Fig. 5 shows a comparison of the computed reflection coefficients for three methods. Here, EFEM is referred to as the full model incorporating evanescent modes, and both wide-spacing approximation and plain wave approximation are considered. In the computation, the evanescent modes are fixed to 50, but the number of steps is variable to observe its effect on the reflection coefficient. Evidently, as the step number increases, the results of both approximations become closer.

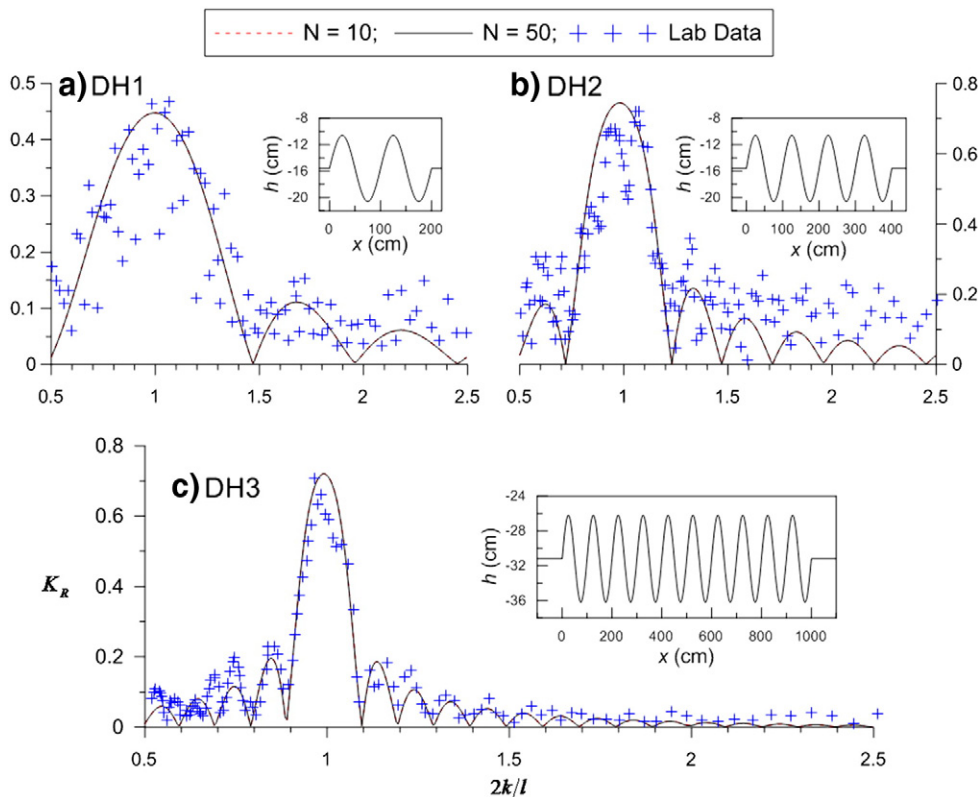


Fig. 3. Comparison of reflection coefficients for sinusoidal topographies listed in Table 2. The red dashed line is the result for 10 evanescent modes with 100 steps per bar wavelength and the solid line for 50 modes with 400 steps per bar wavelength (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article).

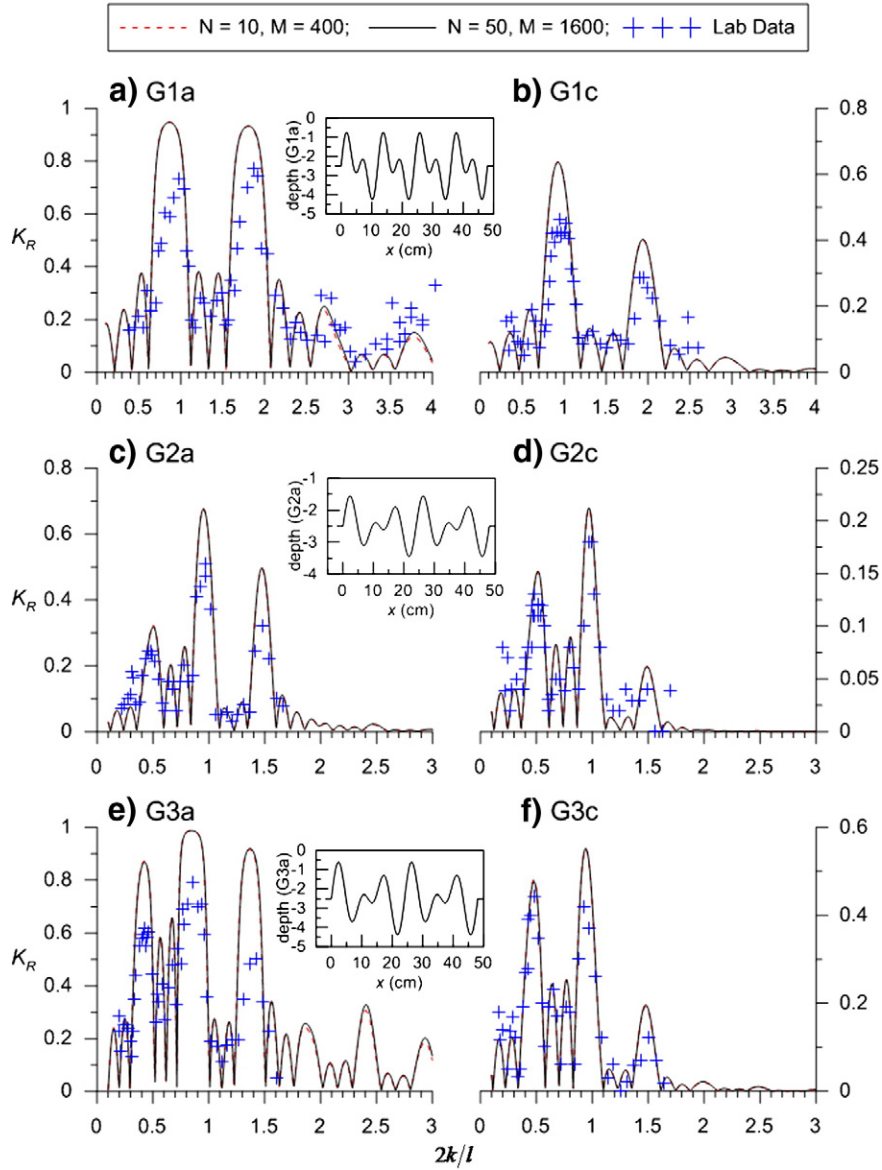


Fig. 4. Comparison of reflection coefficients for doubly sinusoidal topographies listed in Table 2. The red dashed line is the result for 10 evanescent modes with 400 steps and the solid line for 50 modes with 1600 steps (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.).

This implies that the merit of wide-spacing approximation diminishes for a large system with a sufficient number of unknowns. However, it should be noted that a large number of unknowns is a necessary condition to obtain an accurate solution. Once again, Fig. 5 shows that the full EFEM has to be used for the correct prediction of wave scattering over a steep topography.

As described before, the present method can be directly applied to a finite number of subsystems, and scattering matrices of each subsystem are obtained from those of individual steps in the subsystem. These scattering matrices of the subsystem can be used to analyze the interaction between bars of a given topography. To this end, we consider two beds, “DH2” and “G1a”, and the mode number is fixed to $N = 10$. Each bed has 4 bars, each of which is approximated by 100 steps. Fig. 6 shows the reflected wave amplitude, $|p_{\bar{1}}^-|$ in Eq. (2.6), from bars under consideration, and an incident plane wave of unit amplitude comes from $x \rightarrow -\infty$.

Fig. 6a shows reflection coefficients from the first two bars. The extended scattering matrix of each bar, $\tilde{\mathbf{R}}_i^\pm$ and $\tilde{\mathbf{T}}_i^\pm$, can be computed

from Eqs. (3.14) and (3.15) by using those of individual steps in a bar. Then, the scattering equation for bars is given similarly to Eq. (3.7) by

$$\begin{cases} X_1^- = \tilde{\mathbf{R}}_1^+ X_1^+ + \tilde{\mathbf{T}}_1^- X_{101}^- \\ X_{101}^+ = \tilde{\mathbf{T}}_1^+ X_1^+ + \tilde{\mathbf{R}}_1^- X_{101}^- \\ X_{101}^- = \tilde{\mathbf{R}}_2^+ X_{101}^+ + \tilde{\mathbf{T}}_2^- X_{201}^- \\ X_{201}^+ = \tilde{\mathbf{T}}_2^+ X_{101}^+ + \tilde{\mathbf{R}}_2^- X_{201}^- \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1^- \\ X_{101}^+ \\ X_{101}^- \\ X_{201}^+ \end{cases} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_2^+ & \tilde{\mathbf{S}}_2^- \end{bmatrix} \begin{cases} X_1^+ \\ X_{201}^- \end{cases}. \quad (4.4)$$

From Eq. (4.4), the reflected wave amplitude vector X_1^- can be expressed in terms of two incoming waves, X_1^+ and X_{201}^- , towards the bars. Solving the equation, we have

$$X_1^- = \left[\tilde{\mathbf{R}}_1^+ + \tilde{\mathbf{T}}_1^- (\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{R}}_2^+ \tilde{\mathbf{R}}_1^-)^{-1} \tilde{\mathbf{R}}_2^+ \tilde{\mathbf{T}}_1^+ \right] X_1^+ + \tilde{\mathbf{T}}_1^- (\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{R}}_2^+ \tilde{\mathbf{R}}_1^-)^{-1} \tilde{\mathbf{T}}_2^- X_{201}^-. \quad (4.5)$$

The reflected wave from the two bars for the incident wave X_1^+ has two components. The $\tilde{\mathbf{R}}_1^+$ component is a contribution from the first bar, and

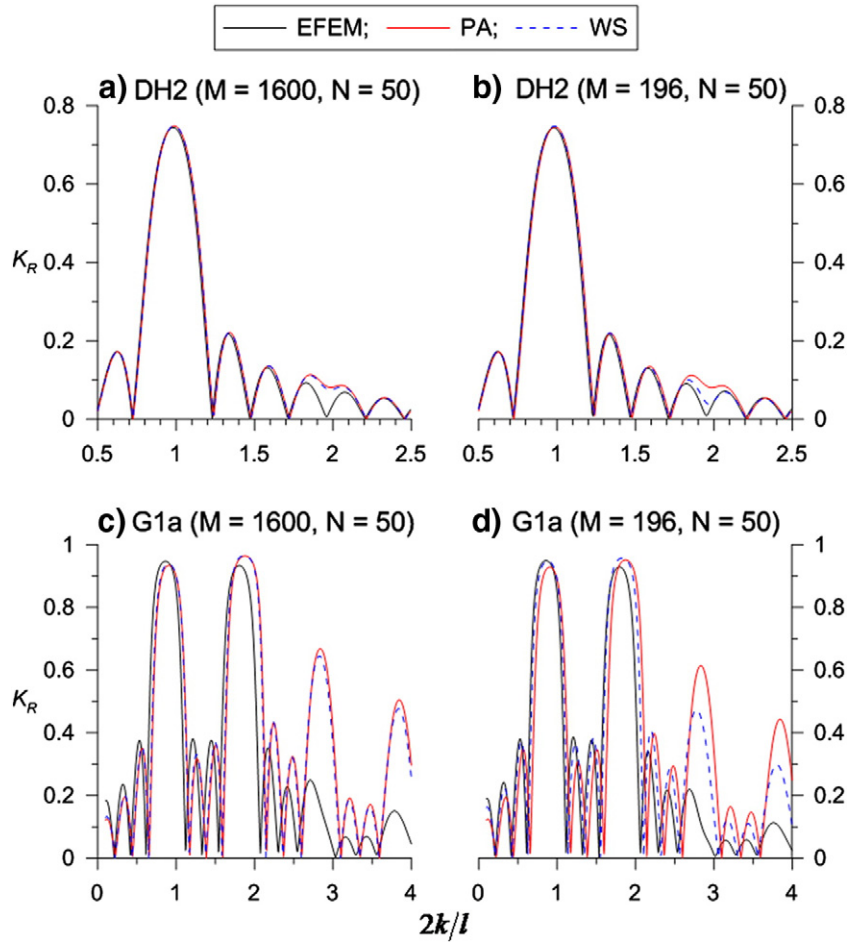


Fig. 5. Validity check for wide-spacing approximation as the number of steps increases. The bed configurations are listed in Table 2.

the other indicates multiple interactions between two bars. In Fig. 6a, the solid black line denotes the reflection coefficients from the two bars, the blue line with symbols is for the contribution of $\tilde{\mathbf{R}}_1^+$, and the red one is for the interaction. The green line is the phase difference of the two components. In the neighborhood of $2k/l = 1$, they are almost in phase, and the reflection coefficient is reinforced. On the other hand, near $2k/l = 1.47$, they are out of phase, which gives rise to very small reflection. Second-order resonance occurs near $2k/l = 2$, but the computed reflection coefficient is close to zero. In Fig. 6a, it can be observed that the two contributions are nearly in phase, but both amplitudes are close to zero, which gives nearly zero reflection.

Similarly, we can compute the extended transfer matrix of the first three bars $\tilde{\mathbf{S}}_3^+$ from Eqs. (3.12)–(3.15). To compute the solution of the four bars given, we finally have to use the above equations once again. Then, the reflected wave amplitude vector X_1^- for the problem is updated to

$$X_1^- = \left(\tilde{\mathbf{S}}_{3,1}^+ + \tilde{\mathbf{S}}_{3,1}^- \tilde{\mathbf{S}}_{4,7}^+ \right) X_1^+ + \tilde{\mathbf{S}}_{3,1}^- \tilde{\mathbf{S}}_{4,7}^- X_{401}^- \quad (4.6)$$

with

$$\tilde{\mathbf{S}}_{4,7}^+ = \left(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{R}}_4^+ \tilde{\mathbf{S}}_{3,6}^- \right)^{-1} \tilde{\mathbf{R}}_4^+ \tilde{\mathbf{S}}_{3,6}^+, \quad \tilde{\mathbf{S}}_{4,7}^- = \left(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{R}}_4^- \tilde{\mathbf{S}}_{3,6}^- \right)^{-1} \tilde{\mathbf{T}}_4^- \quad (4.7)$$

From the given conditions of an incident wave, the second term in Eq. (4.6) is now dropped out. Fig. 6b corresponds to the “DH2” bed in Table 2. When an additional bar is added, the magnitude of the resonance peaks is increased and the peak width becomes narrower. The number of side lobes flanked by the main peak is also increasing,

as shown in the figure, which is largely caused by the phase difference between two contributions. The magnitude due to interaction is diminishing with increasing bar number, which in turn makes the main peak magnitude increase slowly. Near $2k/l = 2$, the reflection coefficient and magnitude of both contributions become zero again. Now, it is evident that this originated from a single bar and continuously carried over. Accordingly, in all sinusoidal beds, a very small reflection is detected near $2k/l = 2$.

Fig. 6d corresponds to a doubly sinusoidal bed “G1a”, and reflection coefficients from its first two bars are shown in Fig. 6c. Since the component wavelength ratio of the bed is 2, both first-order and difference resonances occur at a value of $2k/l = 1$. Thus, it is difficult to discriminate the two contributions separately. In comparison with Fig. 6a, Fig. 6c shows a more apparent shift of the first-order resonance peaks. This shift also appears in the result of the single bar, indicated by the blue line with symbols in Fig. 6c.

The model prediction for a doubly sinusoidal bed “G3a” is shown in Fig. 6e and Fig. 6f. The ratio of larger and smaller component wavelengths in this bedform is given by 1.5, so additional higher-order resonances occur at distinct values of 0.5 and 2.5 in contrast to the bed “G1a”. Since bed “G3a” is more complex in shape and steeper, graphs of both the reflection coefficient and phase difference look more complicated, and the shift of the first-order resonance peaks is most significant.

5. Conclusions

A new transfer matrix incorporating evanescent modes is developed to solve the two-dimensional linear wave scattering problem by varying topography. When the matrix acts on the given incident waves, the full

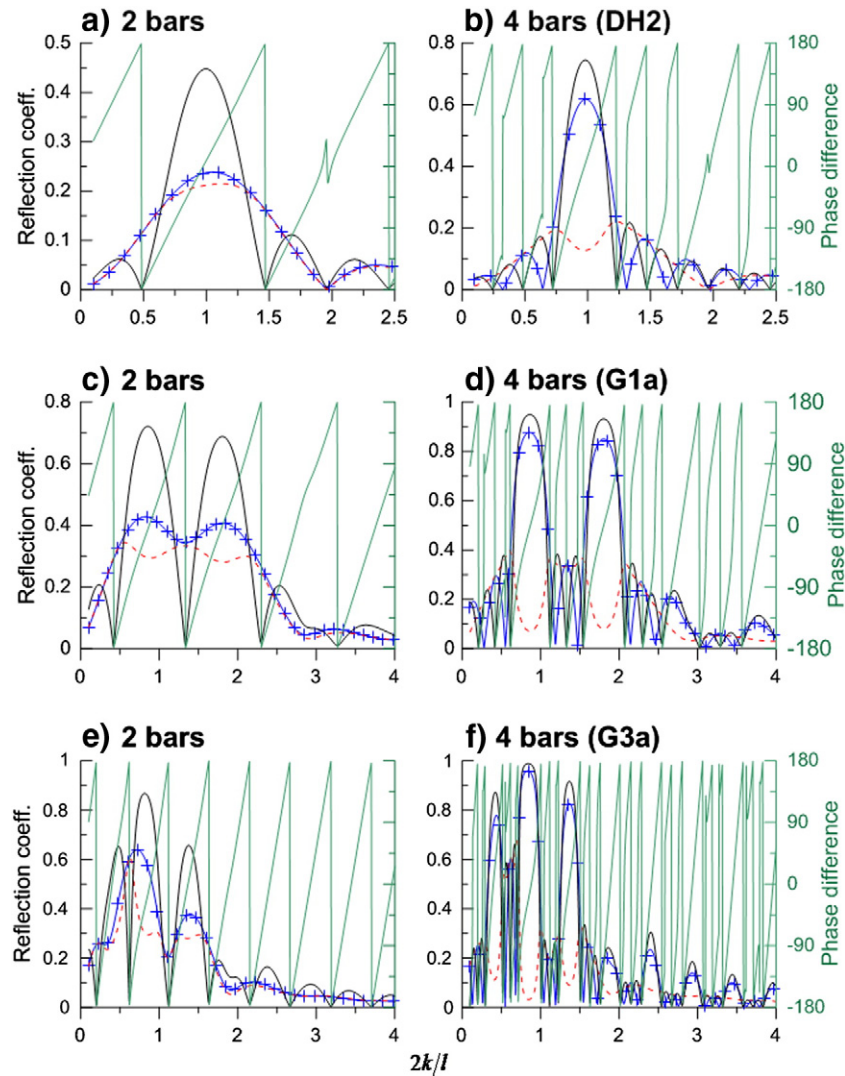


Fig. 6. Changes in reflection coefficient and its contributions with increasing number of bars in periodic beds for incident plane wave of unit amplitude coming from $x \rightarrow -\infty$. The solid black line denotes reflection coefficients from all bars under consideration, the blue line with symbols for contribution for the other bars except the last one and the red dotted line for the interaction between two components in the bed. The green line is the phase difference of the two components (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.).

solution of the scattered wave field over a stepwise topography is obtained. The transfer matrix is represented in terms of the scattering matrices of individual steps, which enable the method to efficiently handle practical problems of complicated bedforms. To obtain accurate solutions, we increased the number of unknowns up to 643,200, in which 1600 steps were used with 200 evanescent modes. Tests of computing time also demonstrated the surprisingly powerful capability of the present method in reducing computing time compared to the conventional method of direct inversion. Highly accurate solutions for periodic beds are presented in comparison to previous studies (Chamberlain and Porter, 1995; Guazzelli et al., 1992; O'Hare and Davies, 1993).

The present method can also be applied without modification to smaller subsystems of steps, and the solution does not depend on the choice of subdivision locations. Thus, it improves upon the method of Guazzelli et al. (1992). Repeating the procedure for obtaining the scattering matrix of a subsystem to the group of subsystems gives the scattering properties of the whole bedform. This feature is used to examine interaction between bars in periodic beds, in which changes of the reflection coefficient and its contributions with increasing number of bars are illustrated. The shift of resonance peaks towards lower wavenumbers is reassessed in terms of parameters such as the bar amplitude ratio to still-water depth, the bed slope, and the complexity of the bed shape. For the

sinusoidal beds studied by Davies and Heathershaw (1984), very small reflection near the location of second-order resonance is clarified, and a nearly zero reflection coefficient of a single bar at the point successively affects a very small reflection of this type of periodic bed with multiple bars. For a large system, numerical results of wide-spacing approximation are very close to those of plane wave approximation, and eventually its merit disappears.

Acknowledgments

This work was supported in part by the Korean Government MOF research grant "Development of Korea Operational Oceanographic System, Phase 2", and by KIOST projects, "Development of Mooring Anchor for Artificial Island at Near Shore" and "Stepwise Approximation for Linear Wave Scattering".

References

- Athanassoulis, G.A., Belibassakis, K.A., 1999. A consistent coupled-mode theory for the propagation of small-amplitude water waves over variable bathymetry regions. *J. Fluid Mech.* 389, 273–301.
- Bender, H.J., Dean, R.G., 2003. Wave transformation by two-dimensional bathymetric anomalies with sloped transition. *Coast. Eng.* 50, 61–84.

- Berkhoff, J.C.W., 1972. Computation of combined refraction–diffraction. Proc. 13th Conf. on Coastal Eng. ASCE, 1, pp. 471–490.
- Chamberlain, P.G., Porter, D., 1995. The modified mild-slope equation. *J. Fluid Mech.* 291, 393–407.
- Chamberlain, P.G., Porter, D., 2006. Multi-mode approximations to wave scattering by an uneven bed. *J. Fluid Mech.* 556, 421–441.
- Davies, A.G., Heathershaw, A.D., 1984. Surface-wave propagation over sinusoidally varying topography. *J. Fluid Mech.* 144, 419–443.
- Devillard, P., Dunlop, F., Souillard, B., 1988. Localization of gravity waves on a channel with a random bottom. *J. Fluid Mech.* 186, 521–538.
- Evans, D.V., Linton, C.M., 1994. On step approximation for water–wave problems. *J. Fluid Mech.* 278, 229–249.
- Greenberg, M.D., 1978. *Foundations of applied mathematics*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Guazzelli, E., Rey, V., Belzons, M., 1992. Higher-order bragg reflection of gravity surface waves by periodic beds. *J. Fluid Mech.* 245, 301–317.
- Kirby, J.T., 1986. A general wave equation for waves over rippled beds. *J. Fluid Mech.* 162, 171–186.
- Kirby, J.T., Dalrymple, R.A., 1983. Propagation of obliquely incident water waves over a trench. *J. Fluid Mech.* 133, 47–63.
- Massel, S.R., 1993. Extended refraction–diffraction equation for surface waves. *Coast. Eng.* 19, 97–126.
- Mattioli, R., 1991. Resonant reflection of surface waves by non-sinusoidal bottom undulations. *Appl. Ocean Res.* 13, 49–53.
- Mei, C.C., Stiassnie, M., Yue, D.K.-P., 2005. *Theory and applications of ocean surface waves*. World Scientific Publishing Co., Singapore.
- Miles, J.W., 1967. Surface-wave scattering matrix for a shelf. *J. Fluid Mech.* 28, 755–767.
- O'Hare, T.J., Davies, A.G., 1992. A new models for surface wave propagation over undulating topography. *Coast. Eng.* 18, 125–266.
- O'Hare, T.J., Davies, A.G., 1993. A comparison of two models for surface-wave propagation over rapidly varying topography. *Appl. Ocean Res.* 15, 1–11.
- Porter, R., Porter, D., 2000. Water wave scattering by a step of arbitrary profile. *J. Fluid Mech.* 411, 131–164.
- Porter, R., Porter, D., 2003. Scattered and free waves over periodic beds. *J. Fluid Mech.* 483, 129–163.
- Porter, D., Staziker, D.J., 1995. Extensions of mild-slope equation. *J. Fluid Mech.* 300, 367–384.
- Rey, V., Belzons, M., Guazzelli, E., 1992. Propagation of surface gravity waves over a rectangular submerged bar. *J. Fluid Mech.* 235, 453–479.
- Srokosz, M.A., Evans, D.V., 1979. A theory for wave-power absorption by two independently oscillating bodies. *J. Fluid Mech.* 90, 337–362.
- Takano, K., 1960. Effets d'un obstacle parallélepédique sur la propagation de la houle. *La Houille Blanche* 15, 247–267.

주 의

1. 이 보고서는 한국해양과학기술원에서 수행한 주요사업의 연구결과 보고서입니다.
2. 이 보고서 내용을 발표할 때에는 반드시 한국해양과학기술원에서 수행한 주요사업의 연구결과임을 밝혀야 합니다.
3. 국가과학기술 기밀유지에 필요한 내용은 대외적으로 발표 또는 공개하여서는 안됩니다.